Exercices

Equations — inéquations

Exercice 1.— Résoudre les équations suivantes :

$$x-1=\sqrt{x+2}\,,\quad \ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)\,,\quad x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x}\,,\quad |x-1|=|x+2|\,.$$

Exercice 2.— Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{x^2-2x}{2x-3}>1\,,\quad \frac{1}{x-3}>\frac{1}{3x-2}\,,\quad \sqrt{4x^2-1}<2x+1\,.$$

Exercice 3.— Soit $x\in\,]\pi/2,\pi[$ tel que $\cos x=-3/5$. Déterminer la valeur de $\sin x$ et $\tan x$.

Exercice 4.— Soit $f:D\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=(\tan x)\tan(2x)$ pour tout

$$x\in D=\{x\in\mathbb{R}\,:\,(\cos x)\cos(2x)\neq 0\}\,.$$

1. Expliciter les ensembles D et $E=\{x\in D\,:\,f(x)\neq -1\}$.
2. Montrer que pour tout $x\in E$ on a l'égalité $(1+f(x))^{-1}=\cos(2x)$.

Exercice 5.— Résoudre les inéquations suivantes :

$$\tan^2 x\leq 3\,,\quad \frac{\tan^2 x-2}{\tan^2 x-1}\leq\frac{1}{2}\,.$$

Exercice 6.— Déterminer, en fonction des paramètres réels a et λ, les racines du polynôme

$$P(t)=(\lambda+1)t^2-2at+\lambda-1\,.$$

Etudier le signe de $P(t)$ en fonction de t.

Exercice 7.— Montrer que pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ il existe des réels a et b tels que

$$\alpha\cos t+\beta\sin t=a\cos(t+b)\,.$$

En déduire, en fonction du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$, la solution des équations et de l'inéquation suivantes :

$$\cos t+\sin t=\lambda\,,\quad \cos t+2\sin t=\lambda\,,\quad \cos t-\sin t>0\,.$$

Exercice 8.— Etablir les relations suivantes :

$$\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}\,,\quad \sin\theta=\frac{2u}{1+u^2}\,,\quad \tan\theta=\frac{2u}{1-u^2}\,,$$

avec $u=\tan(\theta/2)$. Pour quelles valeurs de θ sont-elles valides ? En utilisant ces relations ainsi que l'exercice **5**, résoudre de nouveau les (in)équations de l'exercice **6**.

Exercice 9.— En s'inspirant de l'exercice précédent, résoudre l'équation suivante :

$$\cos t - 3\sin t + 2\tan(t/2) - 1 = 0\,.$$

On notera α l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\tan\alpha = 2$.

Exercice 10.— Représenter graphiquement les droites d'équation :

$$x - y = 3\,,\quad 2x + y = 3\,,\quad x - y = -2\,.$$

Résoudre les systèmes d'(in)équations suivants et représenter graphiquement leurs solutions :

$$\begin{cases} x - y = 3\,, \\ 2x + y = 3\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3\,, \\ x - y = -2\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y < 3\,, \\ 2x + y > 3\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y < 3\,, \\ x - y \geq -2\,. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y > 3\,, \\ x - y < -2\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y < 3\,, \\ x - y \geq -2\,, \\ 2x + y > 3\,. \end{cases} \qquad (x-y-3)(2x+y-3) \leq 0\,, \qquad (x-y-3)(x-y+2)(2x+y-3) \geq 0\,.$$

Fonctions

Exercice 11.— Déterminer le domaine de définition des fonctions :

$$f_1(x) = \ln\ln|x|\,,\qquad f_2(x) = \ln|\ln|x||\,,\qquad f_3(x) = |\ln|\ln|x|||\,.$$

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{1+x}{4-3x}\right)\,,\qquad f_5(x) = \sqrt{5x+6} + \ln(1-x)\,,\qquad f_6(x) = \ln(x^2 - 2x - 5)\,.$$

Exercice 12.— On se donne trois fonctions réelles de variable réelle, f, g et h. On ne dispose que des informations suivantes :

1. Le domaine de définition de f est $]-2,2[$, f s'annule en -1, 0, 1, elle est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur les autres points,
2. Le domaine de définition de g est $[0,3]$, g s'annule en 0, 1, 2, elle est strictement positive en dehors de ces points.
3. Le domaine de définition de h est $]-1,1]$, h est positive sur son ensemble de définition.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f+g$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $f\cdot g\cdot h$ définie par $(f\cdot g\cdot h)(x) = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$,
3. $\ln(f\cdot g)$, $\ln(f\cdot g\cdot h)$, $\ln(g+h)$,
4. $\sqrt{f\cdot g}$, $\sqrt{g+h}$.

Exercice 13.— Soient des fonctions $f :]-\infty,\pi/2] \to \mathbb{R}$ et $g :]-1/2,+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sin x & \text{si } x \in]0,\pi/2]\,. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-1/2,1/2]\,, \\ \ln x & \text{si } x > 1/2\,. \end{cases}$$

Déterminer le domaine de définition et l'expression des fonctions composées $f\circ g$ et $g\circ f$.

Exercice 14.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.

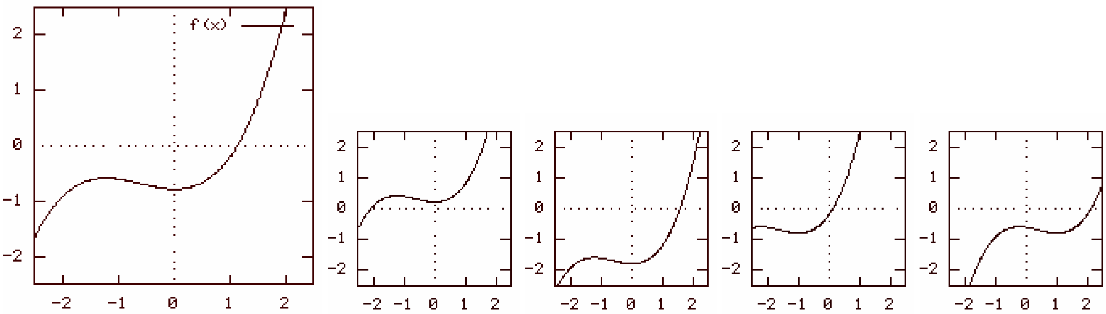
1. Montrer que pour tout $y \geq \ln 2$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \geq 1$.
2. Soit $g : [1,+\infty[\to [\ln 2,+\infty[$ la restriction de f à $[1,+\infty[$. Calculer $(g^{-1}\circ f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.— Déterminer si les fonctions suivantes sont des bijections et, si oui, donner leur fonction réciproque :

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0\,, \\ -\frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 1\,, \\ (x-1)+1 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1\,, \\ x^3 & \text{si } x > 1\,. \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1]\,, \\ x^3 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Exercice 16.— Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x+1)$, $x \mapsto f(x-1)$.

Exercice 17.— Soit a et b deux réels, et f la fonction donnée par $f(x) = ax + b$. On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Quelle est l'équation du graphe de f ? De quelle sorte de courbe s'agit-il ?
2. Déterminer l'équation de l'image de cette courbe par la symétrie d'axe Ox, puis par la symétrie d'axe Oy, et enfin par la symétrie de centre O.
3. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe. Pouvez-vous exprimer ces fonctions à l'aide de f ?
4. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $y = x$. A quelle condition la courbe obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 18.— Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\pi x) \cos \pi(x - a)$. Déterminer pour quelles valeurs de a le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

Limites

Exercice 19.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x) = x^2 + 1 \quad (1)\,, \qquad f_2(x) = -x - \ln x \quad (+\infty)\,, \qquad f_3(x) = x - \ln x \quad (+\infty)\,,$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) \quad (1^+)\,, \qquad f_5(x) = x^2 - x \quad (-\infty)\,.$$

Exercice 20.— En utilisant uniquement le fait que $x^{-1} \sin x \to 1$ lorsque $x \to 0$, étudier la limite des fonctions suivantes au point x_0 indiqué :

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{x - \pi/2}\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}\,; \qquad f_2(x) = \frac{\tan x}{x}\,, \quad x_0 = 0\,; \qquad f_3(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

Exercice 21.— Etudier la limite des fonctions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \quad (1), \qquad f_2(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad (0), \qquad f_3(x) = \frac{|x|}{x} \quad (0^{\pm}),$$

$$f_3(x) = \frac{\sin 4x}{\tan 5x} \quad (0), \qquad f_4(x) = \frac{|\sin 4x|}{\tan 5x} \quad (0^{\pm}), \qquad f_5(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (\pi/2).$$

Exercice 22.— Déterminer les limites de chacune des expressions suivantes aux points indiqués :

$$\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1} \quad (+\infty \text{ et } 1), \qquad \frac{2x+3}{3x^4+2}e^x \quad (+\infty), \qquad \frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln x} \quad (+\infty),$$

$$(3x^4-2x^2)e^{-x} \quad (+\infty), \qquad (3x^2-2x)e^{-\sqrt{x}} \quad (+\infty), \qquad (3x^2-2x)e^{-2\ln x} \quad (+\infty),$$

$$\sqrt{x}\ln(x^2+2x) \quad (0 \text{ et } +\infty), \qquad \frac{\ln(x^2+2x)}{\sqrt{x}} \quad (0 \text{ et } +\infty).$$

Exercice 23.— Déterminer la limite des fonctions suivantes au point indiqué :

$$f_1(x) = \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \quad (0), \qquad f_2(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} \quad (+\infty), \qquad f_3(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+e^x)}}{x^2} \quad (+\infty),$$

$$f_4(x) = 2^{1/x^2} - 2^{1/(1+x^2)} \quad (+\infty), \qquad f_5(x) = \sin x \sin(1/x^2) \quad (-\infty).$$

Exercice 24.— Déterminer si les fonctions suivantes sont bien définies au voisinage de $+\infty$, puis si elles ont une limite lorsque $x \to +\infty$:

$$e^{x+\cos x} - e^x, \qquad \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sin\sqrt{x}}, \qquad \sqrt{1+\sin x + x} - \cos x, \qquad \sqrt{1+x} + \sin\ln x - \sqrt{x}.$$

Exercice 25.— Dans cet exercice les fonctions notées ε sont définies (au moins) dans un certain voisinage de 0 et ont pour limite 0 en 0.

1. Déterminer les domaines de définition, resp D_a, D_b des fractions rationnelles suivantes :
$$a(x) = \frac{2x+4}{x^2+x-2}, \qquad b(x) = \frac{x-1}{x^4+2x^2+1}.$$
2. Justifier l'existence de deux fonctions ε_1 et ε_2 telles que pour tout x dans D_a :
$$a(x) = \frac{2}{3} + \varepsilon_1(x-4) \quad \text{et} \quad a(x) = -\frac{2}{5} + \varepsilon_2(x+4).$$
Les fonctions ε_1, ε_2 sont-elles égales ?
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction ε_0 telle que pour tout h dans $\mathbb{R}$:
$$b(x_0+h) = \frac{x_0-1}{x_0^4+2x_0^2+1} + \varepsilon_0(h).$$
Donner une formule pour la fonction ε_0.

Exercice 26.— Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière définie de la façon suivante : pour tout nombre réel x, on notera $E(x)$ l'unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq x < k+1$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$. Montrer que $E(x)$ admet en $x = x_0$ des limites à droite et à gauche distinctes.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que $E(x)$ admet une limite lorsque $x \to x_0$.
3. La fonction E admet-elle des limites en $\pm\infty$?
4. Montrer que la fonction $f(x) = xE(1/x)$ admet une limite lorsque $x \to 0$.

Exercice 27.— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $I_1(x) = [0, x]$, $I_2(x) = [-x, x]$ et $I_3(x) = [x, +\infty[$. Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on va définir des fonctions N_1, N_2, $N_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ de la façon suivante. Soit $k \in \{1, 2, 3\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si f admet un nombre fini $n(x) \in \mathbb{N}$ de zéros dans l'intervalle $I_k(x)$, on pose $N_k(x) = n(x)$. Sinon, on pose $N_k(x) = -1$. Déterminer si les fonctions N_k admettent une limite en 0.

Exercice 28.— Démontrer soigneusement, en précisant les fonctions et opérations employées, la continuité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(x^2 + e^x)\,, \quad f_2(x) = \ln(1 - x^2) + \sqrt{2 - x^2}\,, \quad f_3(x) = \tan e^{-x}\,, \quad f_4(x) = E(x^2)\,,$$

sur les intervalles respectifs $I_1 = \mathbb{R}$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]\ln(2/\pi), +\infty[$, et $I_4 = [1, \sqrt{2}[$.

Exercice 29.— Déterminer le domaine de définition puis étudier la continuité des fonctions :

1. $\sqrt{x^3 - 3}$
2. $\ln((x-1)^2(x+2)^4)$
3. $\ln(\sqrt{x^2+1} - 2)$
4. $\ln||x-1|+1|$
5. $\ln||x+1|-1|$
6. $\ln||x-1|-1|$
7. $\ln|\sqrt{x-1}+1|$
8. $\ln|\sqrt{x-1}-1|$
9. $\sqrt{\ln(x+1)-1}$

Exercice 30.— Peut-on prolonger par continuité à tout $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 4x - \frac{\sqrt{9x^2}}{x}\,, \quad f_2(x) = \sin(x)\ln|x|\,, \quad f_3(x) = 1 + \frac{e^x}{x}\,, \quad f_4(x) = \frac{(1+x^3)-1}{x}\,.$$

Exercice 31.— Soit f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules :

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une formule pour la fonction composée $f \circ g$. Donner de même une formule pour $g \circ f$. Sur quels ensembles ces fonctions sont-elles continues ?

Exercice 32.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0\,, \\ 2 + x & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Donner l'image par f de chacun des intervalles $[-2, -1]$, $[0, +\infty[$, $[-1, 1]$.

Exercice 33.— Donner — éventuellement par son graphe — un exemple de fonction f continue sur le segment $[0, 1]$ telle que $f(0)f(1) < 0$ et pour laquelle l'équation $f(x) = 0$ admet :

1. une racine et une seule en $x = \frac{1}{2}$.
2. exactement deux racines distinctes.
3. une infinité de racines.

Exercice 34.— Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I :

1. $x^7 - x^2 + 1 = 0$ sur $I = [-2, 0]$.
2. $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} - 3x = 2$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $\tan x = \dfrac{3}{2}x$ sur $I =]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}[$.

On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de la dichotomie — à l'aide du moyen de calcul de son choix.

Exercice 35.— Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1\,.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 36.— On s'intéresse ici à l'existence de valeurs laissées invariantes par une fonction f.

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Montrer que plus généralement, si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction continue alors l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet au moins une solution.
3. Donner des exemples de fonctions f comme dans le point précédent telles que :
   a. l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement une solution.
   b. l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement deux solutions.
   c. l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une infinité de solutions.

Exercice 37.— Montrer que l'équation $\sin x = \frac{x}{x+1}$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une infinité de solutions. On pourra pour cela introduire la fonction différence entre les deux membres de l'égalité et tester ses valeurs aux points de la forme $2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 38.— Pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynomiale définie par :

$$p_n(x) = x^n - n.x + n - 2\,.$$

1. Montrer que l'équation $p_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution notée α_n.
2. Quel est le signe de $p_{n+1}(\alpha_n)$? La suite (α_n) est-elle monotone ?
3. A quelle condition naturelle sur $\beta > 0$ peut-on affirmer que pour tous les entiers n à partir d'un certain rang on a l'encadrement $1 - \frac{\beta}{n} \leq \alpha_n \leq 1$. Quelle est la limite de la suite (α_n) ?
4. A quelle condition naturelle sur $\beta > 0$ peut-on affirmer qu'à partir d'un certain rang on a $\alpha_n \leq 1 - \frac{\beta}{n}$? Il pourra être utile d'étudier le signe de la fonction $\phi(\beta) = e^{-\beta} + \beta - 2$.
5. Quelle est la limite de $(n(1 - \alpha_n))$?

Exercice 39.— On considère un cycliste qui parcourt 90km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction d donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?
2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45km.
3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle I, alors leur moyenne est aussi dans I. Qu'en est-il pour 4 points ? Pour n points ?
4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80mn pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 30km.
5. Généralisation ?

Exercice 40.— Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$.

1. On note $E = \{x \in [0, 1] \ : \ f(x) = x\}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $x_0 \in E$.
2. Vérifier que si $x \in E$ alors $g(x) \in E$.
3. On veut montrer ici que E possède un plus petit élément, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in E$ tel que $\alpha \leq x$ pour tout $x \in E$.
   a. Construire par dichotomie deux suites adjacentes (y_n) et (x_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \in E$ et $y_n \leq x$ pour tout $x \in E$.
   b. On note α la limite commune de (x_n) et (y_n). Montrer d'une part que $\alpha \in E$ et d'autre part que $\alpha \leq x$ pour tout $x \in E$. Autrement dit α est le minimum de E.
4. On peut montrer de même que E a un plus grand élément noté β. En étudiant la fonction $\phi(x) = f(x) - g(x)$ sur le segment $[\alpha, \beta]$, montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 41.— Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels croissante et majorée par A. En introduisant deux suites adjacentes bien choisies, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \leq A$.

Exercice 42.— Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} a + bx - x^2 & x \leq 0\,, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & x > 0\,. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a et b la fonction ϕ est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction ϕ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 43.— Soient $f, g, h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \quad g(x) = \sin\sqrt{x}\,, \quad h(x) = \cos\sqrt{x}\,.$$

Prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité du prolongement.

Exercice 44.— Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin f(x^2)\,, \quad f_2(x) = \sin(f(x)^2)\,, \quad f_3(x) = \sin^2 f(x)\,,$$
$$f_4(x) = \sqrt{1 + f(x)^4}\,, \quad f_5(x) = \ln(2 + \cos f(x))\,, \quad f_6(x) = \tan\frac{\pi}{2 + f(x)^2}\,.$$

Exercice 45.— Etude de formes indéterminées.

1. Soient $p, q \in]0, 1[$. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x \mapsto (2 + x)^p$, puis celui de $x \mapsto (2 + x)^p - (2 + x)^q$. En déduire la valeur de la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{(2 + x)^p - (2 + x)^q}{x}\,.$$
2. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(0)$ des fonctions $x \mapsto \sqrt{1 + x}$, et $x \mapsto \cos x$. Discuter, en fonction de la valeur des paramètres réels α et β, si
$$\frac{\alpha\sqrt{1 + x} + \beta \cos x}{x}\,.$$
admet ou non une limite lorsque $x \to 0^+$.
3. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(1)$ des fonctions $x \mapsto \ln^2 x$ et $x \mapsto \cos(x^2)$. Discuter, en fonction de la valeur du paramètre réel α, si
$$\frac{\ln^2 x + \alpha \cos x^2}{x - 1}$$
admet une limite lorsque $x \to 1$.

Exercice 46.— Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^3)\ln x}{x - 1}\,.$$

Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}_+$. Etudier la dérivabilité à droite en 0 de ce prolongement.

Exercice 47.— Pour chacune des fonctions suivantes : préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité puis calculer l'expression de la fonction dérivée.

$$f_1(x) = x^2 + 1 + x^{11} + x^{101}\,, \qquad f_2(x) = x^5 \cos x\,, \qquad f_3(x) = e^x \sin x\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1 + x}{x - 7}\,, \qquad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x - 1}}\,, \qquad f_6(x) = \frac{1 - x^3}{(1 + x)^2}\,, \qquad f_7(x) = \frac{x + \sin x}{\cos x}\,,$$
$$f_8(x) = (1 + x^2)^{2/3}\,, \qquad f_9(x) = \sqrt{1 + (x \sin x)^2}\,, \qquad f_{10}(x) = \ln\tan x\,,$$
$$f_{11}(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{1 + \sin x}\,, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^2}{2 - \cos x}\,, \qquad f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^2}}\,,$$
$$f_{15}(x) = \exp(1/\ln x)\,, \qquad f_{16}(x) = \ln\ln\ln x\,, \qquad f_{17}(x) = x|x|\,, \qquad f_{18}(x) = \frac{x^2}{1 + |x|}\,.$$

Exercice 48.— Soient $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -x\cos x$. Montrer qu'en tout point d'intersection des graphes de f et g, les tangentes sont perpendiculaires.

Exercice 49.— Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \tan \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}, \qquad \phi(x) = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

Quelle est l'image de ϕ ? En déduire que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 50.— Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Donner une formule pour sa dérivée.
2. Quelle est la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 1$? La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 51.— Déterminer l'ensemble de définition, étudier les variations et rechercher les extrema locaux de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^4 - x^2, \qquad f_2(x) = x^5 - 5x^3, \qquad f_3(x) = \frac{x}{1 + x^2},$$
$$f_4(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad f_5(x) = x \ln x, \qquad f_6(x) = e^x \sin x.$$

Exercice 52.— Etudier les variations et rechercher les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos x + \sin x, \quad f_2(x) = \cos x - \sin x, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \quad f_4(x) = x + 2\cos x.$$

Exercice 53.— Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 54.— On veut ici démontrer l'encadrement $2x/\pi < \sin x < x$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$.

1. Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^{-1}\sin x$ sur l'intervalle $]0, \pi]$. Conclure.

Exercice 55.— Montrer que l'équation suivante admet au moins une solution dans $[0, \pi]$:

$$(x^2 + 1)\cos x + 2x \sin x = 0.$$

On pourra pour cela considérer la fonction $\phi(x) = (x^2 + 1)\sin x$ et sa dérivée.

Exercice 56.— Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Démontrer, sans grands calculs, que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue réelle x admet exactement trois solutions.

Exercice 57.— Montrer que si une fonction polynomiale admet n (un entier) racines dans $\mathbb{R}$ alors sa dérivée admet $n-1$ racines. Est-il vrai, *a contrario* , que si la dérivée admet $n-1$ racines, alors la fonction admet au moins n racines ? Donner un exemple.

Exercice 58.— Etablir les inégalités suivantes :

1. Pour tous réels a et b : $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$,
2. Pour tous réels x et h : $|\cos(x + h) - \cos x| \leq |h|$,
3. Pour tout réel x : $|e^{2x} - e^x| \leq |x|e^{2|x|}$.

Exercice 59.— Quelques calculs de limites.

1. A l'aide du théorème des acroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} .$$
2. En déduire successivement les limites des fonctions suivantes lorsque $x \to +\infty$:
$$f_1(x) = \sqrt{x}\,(\ln(x+1) - \ln x) \ , \qquad f_2(x) = x\,(\ln(x+1) - \ln x) \ ,$$
$$f_3(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ , \qquad f_4(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \ .$$

Fonctions réciproques

Exercice 60.— Déterminez les réels m pour que la fonction définie par $f(x) = \ln(x^3 + x^2 + mx)$ soit une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.

Exercice 61.— Soit $f(x) = \arccos \cos x$ et $g(x) = \arcsin \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est périodique de période 2π. Simplifier $f(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Dessiner le graphe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est périodique de période 2π. Simplifier $g(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$. Dessiner le graphe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 62.— Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
2. Exprimer $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. En déduire une expression simplifiée de $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.
3. Justifier que $f(x) = \arcsin(2\sin(x)\cos(x))$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et simplifier $f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 63.— Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
2. $\sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x) = 1$.
3. $\sin x - 2\cos(2x) = 0$.

Exercice 64.— Montrer l'égalité $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$. On pourra commencer par calculer $\tan(\alpha + \beta)$ en fonction de $\tan \alpha$ et $\tan \beta$.

Exercice 65.— Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\arctan 2x + \arctan x = \pi/4$.
2. $\arcsin 2x - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$.
3. $\arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = 7\pi/12$.

Exercice 66.— Montrez que $\arcsin(4/5) = 2\arctan(1/2)$.

Exercice 67.— Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) .$$
Montrer que $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Que se passe-t-il lorsque x est au voisinage de $-\infty$?

Exercice 68.— Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos(x^2 + 2x - 1)\,.$$

Calculez la dérivée de f, et précisez le domaine de validité de ce calcul.

Exercice 69.— Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du calcul). En déduire une nouvelle expression plus simple pour la fonction initiale.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{2}\right)\,, \quad g(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Primitives — intégrales

Exercice 70.— Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions :

$$f_1(x) = \tan^2 x\,,\quad f_2(x) = \tan x\,,\quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,,\quad f_4(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,,$$
$$f_5(x) = |x^2-1|\,,\quad f_6(x) = \frac{1}{(x-5)^3}\,,\quad f_7(x) = \ln(4-x)\,,\quad f_8(x) = |x|^{2/5}\,.$$

Exercice 71.— Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \cos x \sin^4 x dx\,,\quad I_2 = \int_0^2 (1+|x-1|^3)dx\,,\quad I_3 = \int_{\pi/4}^0 \tan x dx\,,$$
$$I_4 = \int_0^{\pi/6} \cos^3 x + \sin^3 x dx\,,\quad I_5 = \int_{-1}^{-2} \frac{x^2}{4+x^3}dx\,,\quad I_6 = \int_0^{1/2} \frac{e^{\arctan(2x)}}{1+4x^2}dx\,,$$
$$I_7 = \int_{1/2}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad I_9 = \int_0^{-1} x\sqrt{1+x^2}dx\,,\quad I_{10} = \int_{-1}^2 |x|dx\,.$$

Exercice 72.— On note $D = \{x \in \mathbb{R}\,:\, \sin x + \cos x \neq 0\}$.

1. Déterminer D. Quel est le plus grand intervalle $I \subset D$ contenant 0 ?
2. On définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = (\sin x)(\cos x + \sin x)^{-1}$. Trouver les réels a, b tels que $f(x) = a + b(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^{-1}$.
3. Déterminer une primitive de f sur I.

Exercice 73.— Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2)$.

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point $E(e, f(e))$.
3. Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe et la tangente T.

Exercice 74.— Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^3+3x^2+7x+5}\,.$$

On recherche une primitive de f.

1. Trouver une racine réelle évidente du polynôme $x^3 + 3x^2 + 7x + 5$.
2. On note x_0 la racine précédente. Déterminer les réels p, q tels que

$$x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = (x - x_0)(x^2 + px + q)\,.$$

3. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$f(x) = \frac{a}{x - x_0} + \frac{bx + c}{x^2 + px + q}.$$

4. Déterminer les réels λ et μ tels que $bx + c = \lambda(2x + p) + \mu$.
5. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{(x + 1)^2 + 4}.$$

   Trouver une primitive de g.
6. Conclure.

Exercice 75.— Soit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

1. Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f(x) = (x \ln x)^{-1}$.
2. En déduire que pour tout entier $k \geq 2$ on a la majoration

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt\,,$$

   puis donner pour tout $n \geq 2$ une minoration de u_n par une intégrale à préciser.
3. Soit un entier $n \geq 2$. Calculer

$$I_n = \int_2^{n+1} f(t)dt\,.$$

   En déduire $\lim I_n$ et $\lim u_n$.

Exercice 76.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos x} dx\,, \quad I_2 = \int_0^{\pi/3} x \cos(2x) dx\,, \quad I_3 = \int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2} dx\,, \quad I_4 = \int_0^{1/2} \arcsin x dx\,.$$

Exercice 77.— A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur intervalle de définition :

$$f(x) = (x^2 - x)(\ln x - 1)\,, \quad g(x) = 2x^3 e^{x^2+1}\,, \quad h(x) = \frac{x + 1}{e^x}.$$

Exercice 78.— Soit la fonction $I :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $\alpha > 0$ par

$$I(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx\,.$$

1. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{1 + x^2}.$$

2. En utilisant une intégration par parties, calculer $I(\alpha)$.
3. Calculer $\lim_{0^+} I$.

Exercice 79.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x\cos x + \sin x)\ln x dx\,, \quad I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)dx\,, \quad I_3 = \int_1^e (\ln x)^3 dx\,.$$

Exercice 80.— Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle sur lequel ce calcul est valable.

$$f_1(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad f_2(x) = \arcsin x\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{1+4x^2}\,, \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,.$$

Exercice 81.— On veut calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3})dx\,.$$

1. Trouver une primitive de $\phi(x) = x^2 \sin x$ en effectuant plusieurs intégrations par parties.
2. Calculer I en utilisant le changement de variables $u = \pi x^{1/3}$.

Exercice 82.— Justifier la bonne définition de chacune des intégrales suivantes, puis trouver leur valeur à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}dx\,, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx\,, \qquad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}\,.$$

On posera respectivement $u = x+1$, $u = \cos^2 x$, $u = \cos x$ et $x = u^2 - 1$.

Exercice 83.— Calculer l'intégrale suivante où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$:

$$\int_a^b x\sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser le changement de variables $x = (1-t)a + tb$ où la nouvelle variable t varie dans l'intervalle $[0,1]$ puis le changement de variables $t = \sin^2 u$ où u varie dans $[0, \pi/2]$.

Exercice 84.— Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^1 \arctan\left(\frac{1+\cos^5 x}{\pi + \sqrt{x^8 - 2x^4 + 1}}\right) \sin x dx\,.$$

Exercice 85.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\cos x} f(t)dt, \qquad \varphi_2(x) = \int_x^{x^3} f(t)dt, \qquad \varphi_3(x) = \int_x^{x^3} f(tx)dt\,.$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer φ_1' et φ_2'.
2. Montrer que φ_3 est continue en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $\varphi_3'(x)$ si $x \neq 0$.
3. Montrer que $\varphi_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 86.— On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt\,.$$

1. Pourquoi f est-elle bien définie ? Montrer qu'il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire que f est constante et calculer sa valeur.

Exercice 87.— Pour tout entier naturel n on note :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sin x}\,, \qquad I_n = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f_n(x)dx\,.$$

1. Justifier la bonne définition de I_n. Rappeler les valeurs $\sin(\pi/3)$, $\sin(2\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$, $\tan(\pi/3)$.
2. Donner la valeur de I_1.
3. Donner la valeur de I_0. On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan(x/2)$ en utilisant la relation $\sin x = 2t/(1+t^2)$.
4. n étant un entier naturel, simplifier $I_{n+2} - I_n$ en utilisant autant de fois que nécessaire la relation trigonométrique $\cos p - \cos q = -2\sin((p-q)/2)\sin((p+q)/2)$.
5. En déduire la valeur de I_n lorsque n est impair.
6. Donner les valeurs de I_2 et de I_4.

Exercice 88.— Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -x\ln x & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

On pose pour tout $(h,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$I_k = \int_0^1 \frac{(f(x))^k}{k!}dx \quad \text{et} \quad H_{h,k} = \int_0^1 x^h(\ln x)^k dx\,.$$

1. Calculer I_1.
2. Montrer que $(h+1)H_{h,k} = -kH_{h,k-1}$ pour tout $k \geq 1$.
3. Calculer $H_{h,0}$. En déduire que $H_{h,k} = (-1)^k k!(h+1)^{-k-1}$.
4. En utilisant ce qui précède trouver la valeur de I_k.

Exercice 89.— Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 que l'on suppose strictement croissante. On considère les deux intégrales :

$$I_1 = \int_a^b f(t)dt\,, \qquad I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt\,.$$

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans I_2 et calculer I_2 en fonction de I_1.
3. En supposant $a, b, f(a), f(b) \geq 0$, faire un dessin des deux sous-graphes $0 \leq y \leq f(x)$ et $0 \leq x \leq f^{-1}(y)$ et interpréter ce résultat géométriquement.

Développement limités

Exercice 90.— Etude de formes indéterminées.

1. Soient des réels $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Ecrire le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{-1}$. En déduire par composition le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $x \mapsto (a + bx + x\varepsilon(x))^{-1}$.
2. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = ax + bx^2 + x^2\varepsilon(x)$ au voisinage de 0. On note $g(x) = x/f(x)$ lorsque $x \in D \setminus \{0\}$. A quelle condition g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? Montrer que ce prolongement, s'il existe, admet un $\mathrm{DL}_1(0)$.
3. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)\,, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\,, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right)\,.$$

Exercice 91.— On traitera cet exercice avec les valeurs $\alpha = \pi/3$, puis $\alpha = \pi/4$, $\alpha = \pi/6$.

1. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\sqrt{2}}$ puis le $\mathrm{DL}_2(\alpha)$ de sin et cos.
2. En déduire par composition le $\mathrm{DL}_2(\alpha)$ de $\sin^{\sqrt{2}}$ et $\cos^{\sqrt{2}}$.

Exercice 92.— Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{3+x}{2+x}\,, \quad f_2(x) = e^x \ln^2(1+x)\,, \quad f_3(x) = \arcsin x + \cos x\,, \quad f_4(x) = \ln\cos x\,.$$

Exercice 93.— Donner le $\mathrm{DL}_2(\alpha)$ au point α indiqué pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2+x}{3+x}\,,\ \alpha = -1\,; \qquad f_2(x) = \ln\sin x\,,\ \alpha = \pi/4\,; \qquad f_3(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}\,,\ \alpha = 1\,.$$

Exercice 94.— Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente au graphe à l'abscisse indiquée et préciser les positions relatives du graphe et de cette tangente :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + \sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}\,, \qquad x_0 = 1\,,\\ f_2(x) &= \arccos x + \cos x\,, \qquad x_0 = 0\,,\\ f_3(x) &= \sin x - \cos 2x\,, \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Exercice 95.— Soit $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x + x$.

1. Montrer que f définit une bijection entre $[-\pi/2, \pi/2]$ et un intervalle I que l'on précisera.
2. On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Quel est le sens de variation de g ?
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intérieur de I. Etudier ses dérivées à droite (ou à gauche) aux bornes de I.
4. Calculer les valeurs $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$. En déduire un développement limité à l'ordre 2 de g au point 1. Vérifier le calcul en écrivant un développement limité de $g \circ f$ au point 0.

Exercice 96.— Soit $f :]0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^3)\ln x}{x-1}\,.$$

1. Donner le $\mathrm{DL}_1(1)$ de $x \mapsto \ln(1+x^3)$ et le $\mathrm{DL}_2(1)$ de ln.
2. En déduire le $\mathrm{DL}_1(1)$ de $x \mapsto \ln(1+x^3)\ln x$. En conclure que f se prolonge par continuité en 1 en une fonction dérivable en $x = 1$.

Exercice 97.— Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x^2+x^3)^{1/3}$.

1. On note $g(h) = (1+h+h^3)^{1/3}$ pour tout $h \geq 0$. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de g.
2. Pour tout $x > 0$, écrire $f(x)$ à l'aide de x et $g(1/x)$.
3. En déduire qu'il existe des réels a, b, c tels que la fonction f admet le développement asymptotique suivant au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\,, \qquad x \to +\infty\,.$$

En déduire que le graphe de f admet une asymptote lorsque $x \to +\infty$. Quelles sont les positions relatives du graphe et de l'asymptote ?

Exercice 98.— Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+x^2} + 1 & x < 0\,, \\ -x^2 + 2 + 2x & x \geq 0\,. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. La fonction f admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$?
3. Quelle est la position relative de la tangente en $x = 0$ et du graphe ?

Nombres complexes

Exercice 99.— Questions diverses.

1. Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer les réels $\rho_k > 0$ et $\theta_k \in [0, 2\pi[$ tels que $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, avec $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = 3 - i\sqrt{3}$, $z_4 = \frac{1+i}{1-i}$.
2. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 + 2z + 2$ est respectivement nul, réel ou imaginaire pur.
3. En utilisant la relation $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$, retrouver l'expression de $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$ en fonction de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tels que $\frac{i-z}{1+z}$ est réel.

Exercice 100.— Soit t un réel non nul. Déterminer en fonction de t les racines réelles ou complexes du polynôme $P(z) = z^2 + tz - 2/t$. On note $z_-(t) < z_+(t)$ les deux racines réelles lorsque $t > 2$. Montrer que $z_-(t)$ et $z_+(t)$ tendent vers une limite que l'on déterminera lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 101.— Soient x_0, y_0 des réels fixés. On veut montrer qu'il existe un unique couple (x, y) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, prenant en $t = 0$ les valeurs $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, et vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t)\,, \\ y'(t) = x(t) + y(t)\,. \end{cases}$$

1. Etant donnée une solution (x, y), on note $z(t) = x(t) + iy(t)$. Montrer qu'alors z vérifie l'équation $z'(t) = az(t)$ et $z(0) = z_0$, où a et z_0 sont des complexes à déterminer.
2. Démontrer le résultat attendu.
3. Quels sont les systèmes différentiels que l'on peut résoudre par cette méthode ?

Exercice 102.— Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes de module 1. On suppose $z_1+z_2+z_3 = 1$. Montrer que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$.

Exercice 103.— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Tracer la courbe paramétrée par $f(t) = e^{(1+i\alpha)t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $|f(t)|$. En déduire que si $0 < R_- < R_+$ sont deux réels, la portion de courbe comprise dans l'anneau $\{z \in \mathbb{C} \,:\, R_- < |z| < R_+\}$ est la trajectoire sur un intervalle du type $]t_-, t_+[$ dont on déterminera les extrémités en fonction de R_- et R_+.

Exercice 104.— Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. On pose $\phi(t) = |\gamma(t)|^2$. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\phi'(t)$.
2. On suppose désormais que pour tout $t \in [0, 1]$ on a $\gamma(t) \neq 0$. On note $\psi(t) = \ln\phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\psi'(t)$.
3. Justifier la bonne définition de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt\,.$$

En notant que $\phi(t) = \gamma(t)\overline{\gamma(t)}$ et en utilisant la question précédente, déterminer à quelle condition sur γ le nombre complexe I est imaginaire pur.

Exercice 105.— Les coefficients de Fourier complexes d'une fonction continue $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ sont définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt\,.$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on note $f_k(t) = e^{ikt}$. Calculer $c_n(f_k)$.
2. On suppose donnés des réels $a_0, \dots, a_N$, $b_1, \dots, b_N$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = 0\,.$$

   On note $g(t)$ la fonction définie par le membre gauche de cette égalité. Calculer $c_n(g)$ de deux façons différentes pour en déduire que les a_k et b_k sont nécessairement tous nuls.
3. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer quelle condition doit satisfaire la fonction f pour que l'égalité $c_n(f') = inc_n(f)$ soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 106.— Pour tout entier $N \geq 0$ et tout réel $t \in \mathbb{R}$, on note

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} e^{-n} e^{int}\,.$$

1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de la suite $(S_N(t))_{N \geq 0}$ lorsque $N \to +\infty$. On la note $f(t)$. Vérifier que ceci définit une fonction $2\pi-$périodique continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
2. On note maintenant $R_N(t) = f(t) - S_N(t)$. Quelle est l'expression de $R_N(t)$ en fonction de N et t ? Vérifier que ceci définit des fonctions $2\pi-$périodiques continues $R_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
3. On reprend ici les notations de l'exercice précédent. On fixe $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(c_n(R_N))_{N \geq 0}$ tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. En déduire la valeur de $c_n(f)$.
4. En conclure que la fonction f est égale à la "somme de sa série de Fourier", c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'égalité

$$f(t) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int}\,.$$

Equations différentielles

Exercice 107.— Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y'(t) + 2y(t) &= 0\,, \quad y'(t) - y(t) = t^2\,, \\ y'(t) + 2y(t) &= e^t\,, \quad y'(t) + y(t) = \sin t\,. \end{aligned}$$

Exercice 108.— Trouver la solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ des problèmes suivants :

$$\begin{cases} y'(t) + 7y(t) = 0\,, \\ y(1) = 0\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) - y(t) = 1\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) - y(t) = e^t\,, \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

Exercice 109.— Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{2y(t)}{t} + t\,, \quad I =]0, +\infty[\,, \\ y'(t) &= \frac{y(t)}{1 - t^2}\,, \quad I =]-1, 1[\,, \\ y'(t) &= \frac{y(t)}{t} + t \arctan t\,, \quad I =]0, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Exercice 110.— Soient les fonctions a, b définies sur $]0, +\infty[$ par

$$a(t) = \frac{1+3t^2}{t(1+t^2)}\,, \quad b(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}\,.$$

1. Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$ telles que $y' = ay$.
2. On pose $z(t) = t^2$. Calculer $z'(t) - a(t)z(t)$ pour tout $t > 0$.
3. En déduire l'unique solution $y \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$ de l'équation $y' = ay + b$ vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 111.— Résoudre les problèmes suivants :

$$\left\{\begin{aligned} y''(t) + y'(t) - 2y(t) &= 0\,,\\ y(0) &= 0\,,\\ y'(0) &= 1\,. \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= 0\,,\\ y(0) &= 1\,,\\ y'(0) &= 1\,. \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} y''(t) - 2y'(t) + y(t) &= 0\,,\\ y(0) &= 1\,,\\ y'(0) &= 0\,. \end{aligned}\right.$$

Exercice 112.— Soit l'équation $y'' - 2y' - 3y = (5t-1)e^{-2t}$.

1. Rechercher une solution évidente sous la forme $y_0(t) = (at+b)e^{-2t}$.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. En déduire toutes les solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation proposée.

Courbes paramétrées

Exercice 113.— On considère la courbe paramétrée par :

$$(x(t), y(t)) = (\cos^2 t, \cos^3 t \sin t)\,.$$

On supposera que l'étude des variations des fonctions coordonnées est la suivante.

t	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		π
x'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
y'	1	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	1
x	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\nearrow$	0

1. Ecrire le $\mathrm{DL}_2(\pi/2)$ de x et y. En déduire la limite de $(t-\pi/2)^{-2}(x(t), y(t))$ lorsque $t \to \pi/2$.
2. Tracer l'allure de la courbe en précisant la tangente en chacun des points du tableau.
3. Donner, sous forme intégrale, une expression de la distance parcourue par le mobile entre deux instants t_0 et t_1. Pouvez-vous calculer cette intégrale ?

Exercice 114.— Soit la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec :

$$x(t) = \cos^3 t\,, \quad y(t) = \sin^3 t\,.$$

1. Déterminer les symétries satisfaites par la courbe.

2. Etudier les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
3. Tracer la courbe géométrique correspondante.

Exercice 115.— Etudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

$$M_1(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t-t^3}{1+t^2}\right), \quad M_2(t) = \left(\tan(t)+\sin(t), \frac{1}{\cos(t)}\right), \quad M_3(t) = \left(t^2+2t, \frac{1+2t}{t^2}\right),$$
$$M_4(t) = \left(\frac{t^2-1}{t}, \frac{t+1}{t(t-1)}\right), \quad M_5(t) = \left(\frac{4t^2}{1-t}, \frac{t^3}{1+t^2}\right), \quad M_6(t) = \left(\frac{\sin^2 t}{2+\sin t}, \cos t\right).$$

Exercice 116.— Déterminer la longueur des arcs paramétrés suivants :

$$\begin{aligned} M_1(t) &= (t-\sin t\,,\ 1-\cos t)\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \\ M_2(t) &= (3\cos t - \cos 3t\,,\ 3\sin t - \sin 3t)\,, \quad t \in [0, \pi]\,, \\ M_3(t) &= (\cos^3 t\,,\ \sin^3 t)\,, \quad t \in [0, \pi/2]\,. \end{aligned}$$

Exercice 117.— On considère la courbe paramétrée par :

$$M(t) = \left(\frac{t}{t^2-1}, \frac{t^2}{t-1}\right).$$

1. Dresser le tableau de variations des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
2. Quelles sont les asymptotes à la courbe lorsque $t \to \pm\infty$ et $t \to -1^{\pm}$? Préciser dans chaque cas la position relative de la courbe et de son asymptote.
3. Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on calculera tels que :

$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = a\,, \qquad \lim_{t\to 1}(y(t) - ax(t)) = b\,.$$

   En déduire l'existence d'une asymptote d'équation $y = ax + b$. Préciser la position relative.
4. Montrer qu'il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$. On pourra commencer par déterminer la somme $\sigma = t_1 + t_2$ et le produit $\tau = t_1 t_2$.
5. Montrer que les deux tangentes au point double sont perpendiculaires.
6. Tracé de la courbe.

Fonctions de deux variables

Exercice 118.— On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{xy^2}{x-2y}, \quad f_2(x,y) = \sqrt{\frac{xy^2}{x-2y}}, \quad f_3(x,y) = \frac{1}{2-x^2-y^2}, \quad f_4(x,y) = \frac{\cos x}{\sin(x+y)},$$
$$f_5(x,y) = \ln(1+x) - \sqrt{y-x}\,, \quad f_6(x,y) = \ln\sin(x^2+y)\,, \quad f_7(x,y) = \tan(x^2+y)\,.$$

1. Déterminer puis tracer l'ensemble de définition de chacune des fonctions.
2. Calculer les dérivées partielles de ces fonctions.

Exercice 119.— Soient les fonctions :

$$f_1(x,y) = y^2 + \sin x\,, \qquad f_2(x,y) = y\sin x\,, \qquad f_3(x,y) = \exp(-x^2-y^2)\,.$$

1. Déterminer les fonctions partielles de ces fonctions en un point (x_0, y_0). Tracer rapidement l'allure de leur graphe, en indiquant notamment les maxima et minima.
2. Tracer l'allure des lignes de niveaux de ces fonctions.

Exercice 120.— Déterminer l'allure des lignes de niveau des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = |x| + |y|\,, \quad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad f_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|)\,.$$

Exercice 121.— Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x,y) = x^2y^2 - y^2 - x^2 - 1$.

1. Calculer $\nabla f(x,y)$.
2. Quelle est la valeur de $\nabla f(1,1)$?
3. Déterminer la ligne de niveau de f passant par $(1,1)$.

Exercice 122.— Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x,y) = x^3 - x^2y + y^2 - 1$.

1. Calculer $\nabla f(x,y)$.
2. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau passant par $(1,1)$. Montrer que cette ligne de niveau est, au voisinage de ce point, le graphe d'une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on explicitera. Retrouver alors l'équation de la tangente en calculant $\phi'(1)$.
3. Calculer $\nabla f(0,0)$. Que peut-on en déduire concernant la ligne de niveau passant par $(0,0)$? Montrer que cette ligne de niveau est, au voisinage de ce point, l'union des graphes de deux fonctions que l'on explicitera. Tracer son allure.

Exercice 123.— Pour chacune des fonctions suivantes f en les deux variables x et y, trouver de nouvelles variables X et Y, fonctions linéaires en x et y, telles que f s'exprime en fonction de X et de Y sous une des formes : XY, $aX^2 + bY^2$, $aY + bX^2$. Dans chacun des cas, préciser l'allure des lignes de niveau de f.

1. $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + y + x$
2. $f_2(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$
3. $f_3(x,y) = 3y^2 - 2x^2 - 5xy$
4. $f_4(x,y) = 4x^2 + 7y^2 + 10xy$

Exercice 124.— Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles premières, donner leur valeur au point indiqué et écrire la formule de Taylor d'ordre 1. On justifiera rapidement que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage du point considéré.

1. $f(x,y) = x\sin(y)$ en $(1,\pi/4)$;
2. $f(x,y) = \tan(x^2+y)$ en $(0,0)$;
3. $f(x,y) = \arctan(y/x)$ en $(2,2)$;
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en $(2,2)$;
5. $f(x,y) = \ln(1+(x+y)^2)$ en (x_0,y_0) ;
6. $P(V,T) = k\frac{T}{V}$ (où k est une constante) au point (V_0,T_0).

Exercice 125.— On considère l'équation $(4+x^2)z + \ln(1+z^2) = x + y$ d'inconnue z.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. En étudiant la fonction $\phi(z) = (4+x^2)z + \ln(1+z^2)$ montrer que l'équation admet une unique solution réelle que l'on notera $z(x,y)$.
2. On admet que $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ calculer $\nabla z(x,-x)$ en fonction de x.

Exercice 126.— Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le DL à l'ordre 1 à partir des DLs classiques des fonctions d'une variable. On vérifiera que le reste se met bien sous la forme de $\|(h,k)\|\epsilon(h,k)$ où ϵ est une fonction de limite 0 en $(0,0)$.

1. $f(x,y) = e^{x-y}$ en $(0,0)$;
2. $f(x,y) = (1+x)\sqrt{1+y}$ en $(0,0)$;
3. $f(x,y) = \sqrt{1+\sin(x-y)}$ en $(0,0)$;
4. $f(x,y) = \frac{1+x}{1+y}$ en $(0,0)$.

Exercice 127.— On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = x^2+2y^2-4x+4y\,,\quad f_2(x,y) = (x^2+y^2-xy)e^{x+y}\,,\quad f_3(x,y) = y^3+yx^2-6x^2-6y^2+9y\,.$$

Déterminer et étudier la nature des points critiques de ces fonctions.

Exercice 128.— Montrer que la fonction $f(x,y) = x+8y+1/(xy)$ a un minimum sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Quelle est sa valeur ?

Exercice 129.— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2 + (1-x^2)^2$.

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner des formules pour les dérivées partielles de f.
2. Déterminer les points critiques de f. Quelle est la valeur de f en ces points ?
3. Pour chacun des trois points critiques déterminés dans la question précédente, déterminer si la fonction f admet un extremum (local) en ce point.
4. Déterminer le signe des trinômes $x^2-1+\sqrt{2}$ et $x^2-1-\sqrt{2}$ suivant les valeurs de x et en déduire le domaine de définition de la fonction de variable réelle $g(x) = \sqrt{2-(1-x^2)^2}$.
5. Déterminer la relation entre le graphe de g et la ligne de niveau 2 de f, i.e. l'ensemble :

   $$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2\}\,.$$

   Tracer l'allure de celle-ci après une brève étude de la fonction g.
6. Déterminer une équation de la tangente à F_2 au point $(\sqrt{2},1)$. On vérifiera que ce point est bien dans F_2. Tracer cette tangente sur le dessin issu de la question précédente.

Exercice 130.— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2))$.

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.
2. Déterminer les points critiques de f. Quelle est la valeur de f en ces points ?
3. Calculer chacune des dérivées partielles secondes de f en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
4. Pour chacun des deux points critiques de f, déterminer si la fonction f admet un extremum (local) en ce point. Précisez s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
5. On pose $g(x) = 2-x^2+2\ln x$ pour $x > 0$.
   (a) Etudier rapidement la fonction g, tracer son tableau de variations.
   (b) Etablir l'existence de deux réels x^- et x^+ strictements positifs, $x^- < x^+$ tels que $g(x) > 0$ si et seulement si $x \in]x^-, x^+[$.
   (c) Montrer que $1 < x^+ < 2$ et $\frac{1}{4} < x^- < 1$. On rappelle que, à 10^{-2} près, $\ln 2 \sim 0.7$.
6. Déterminer la relation entre le graphe de $\sqrt{g}$ et la ligne de niveau e^{-1} de f, i.e. l'ensemble :

   $$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = e^{-1}\}$$

   et tracer l'allure de cette ligne de niveau.
7. Déterminer une équation de la tangente à F au point de coordonnées $(1,1)$. On vérifiera que ce point est bien dans F. Tracer cette tangente sur le dessin issu de la question précédente.
8. Déterminer une équation de la tangente à F au point de coordonnées $(x^+,0)$. On vérifiera que ce point est bien dans F. Tracer cette tangente sur le dessin issu de la question précédente.