Interrogation 1

24 Octobre 2014

Question de cours

1. Donnez la définition d'une suite arithmétique.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnez l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et r.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnez l'expression de v_n.

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1. Calculez les quatre premiers termes de la suite (jusqu'à u_3 donc).
2. Démontrez par récurrence que $u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnez l'expression de u_n.
4. Déterminez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculez les quatres premiers termes de cette suite.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnez l'expression de v_n.
7. Quel est le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, \\ u_0 = 3. \end{cases}$$

1. En traçant les droites d'équations $y = \frac{x}{2} + 1$ et $y = x$, représentez les quatre premiers termes de la suite.
2. Donnez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrez par récurrence que $u_n \geq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
5. Donnez l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire celle de u_n.
6. Conjecturez la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice bonus Démontrez que la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{n^2}{n!}$ est décroissante à partir d'un certain rang à déterminer.