Corrigé de l'interrogation 1

Question de cours

Et bien c'est dans le cours justement.

Exercice 1

1. $u_0 = 2, u_1 = \frac{8}{5}, u_2 = \frac{32}{25}$ et $u_3 = \frac{128}{125}$.
2. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété $(P_n) : u_n \geq 0$.

   Initialisation : On sait que $u_0 = 2 \geq 0$ et donc (P_0) est bien vérifiée.

   Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que (P_{n+1}) l'est également. On a

   $$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n.$$

   Or, on a supposé que $u_n \geq 0$, d'où $\frac{4}{5}u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1} \geq 0$ et (P_{n+1}) est donc vérifiée.

   Conclusion : La propriété (P_0) est vérifiée et on a hérédité et donc (P_n) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4}{5}$. Or on a montré que $u_n > 0$ et comme $\frac{4}{5} < 1$, on peut conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. $v_0 = 2, v_1 = \frac{18}{5}, v_2 = \frac{122}{25}$ et $v_3 = \frac{738}{125}$.
6. $v_n = 2\left(\dfrac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}\right)$.
7. On constate que $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_n = u_{n+1}$. Or, on a montré à la question 2 que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 2 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, \\ u_0 = 3. \end{cases}$$

1. C'est fait plusieurs fois dans les TDs.

2. On constate que $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction affine donnée par $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. Cette fonction est croissante et on remarque de plus que $u_1 = \frac{5}{2} \leq u_0 = 3$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété $(P_n) : u_n \geq 2$.

   Initialisation : On sait que $u_0 = 3 \geq 2$ et donc (P_0) est bien vérifiée.

   Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que (P_{n+1}) l'est également. On a

   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

   Or, on a supposé que $u_n \geq 2$, d'où $\frac{1}{2}u_n \geq 1$ et $\frac{1}{2}u_n + 1 \geq 2$ et donc (P_{n+1}) est vérifiée.

   Conclusion : La propriété (P_0) est vérifiée et on a hérédité et donc (P_n) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On a

   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

   Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géomtrique de raison 2 telle que $v_0 = 1$.

5. $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$.

6. On sait que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ quand n tend vers l'infini donc $u_n \to 2$.

Exercice bonus Il est clair que $u_n > 0$, pour tout $n \geq 1$. On peut donc calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n!\,(n+1)}\frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Or, si $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4}$. Donc, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4} < 1.$$

Et donc la suite est décroissante à partir de $n = 2$ (pour tout $n \geq 2$, on a $u_{n+1} \leq u_n$).