Interrogation 2

21 novembre 2014

Question de cours Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Définissez ce qu'est un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donnez la définition de sa limite $l \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1. En traçant les droites d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x$, représentez les premiers termes de la suite.
2. Démontrez par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnez sa limite.

Exercice 2 Donnez les limites des suites réelles suivantes, définies pour $n \geq 1$.

$$u_n = \frac{n}{n^2+3}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad w_n = \cos\left(\frac{-n^3+2}{n^4+n}\right), \quad t_n = 2 + \frac{\sin(n)}{2n}.$$

Exercice bonus Déterminez, par la méthode de votre choix, la limite de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$