Interrogation 2 : correction

Question de cours Puisqu'on vous dit que c'est dans le cours.

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1. ...

2. On cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété

$$1 \leq u_n \leq 2. \tag{P$_n$}$$

Initialisation : On a $u_0 = 2 \in [1, 2]$, donc (P_0) est vérifiée.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la propriété (P_n) est vérifiée. Montrons que dans ce cas (P_{n+1}) l'est aussi. Comme (P_n) est supposée vraie, on a

$$1 \leq u_n \leq 2.$$

Comme la fonction $x \to \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$1 \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{2}.$$

Et comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $\sqrt{2} < 2$, on obtient

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2,$$

et finalement (P_{n+1}) est vérifiée.
Conclusion : La propriété (P_0) est vérifiée et on a hérédité donc (P_n) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La fonction $x \to \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $u_1 \leq u_0$. Donc, d'après le théorème du cours, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et décroissante, donc elle converge. Sa limite l vérifie nécessairement

$$l = \sqrt{l}$$
$$l - \sqrt{l} = 0$$
$$\sqrt{l}\left(\sqrt{l} - 1\right) = 0$$

Cette équation a comme solutions $l = 0$ et $l = 1$. Comme $u_n \geq 1$, sa limite ne peut pas être 0 et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 2

- $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 3} = \dfrac{n}{n\left(n + \frac{3}{n}\right)} = \dfrac{1}{n + \frac{3}{n}}$.
  Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} n + \frac{3}{n} = +\infty$. On en conclut que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

- $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. On a $-\frac{1}{n^2} \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$, le théorème des gendarmes nous dit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

- $w_n = \cos\left(\frac{-n^3+2}{n^4+n}\right) = \cos\left(\frac{n^3\left(-1+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(n+\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \cos\left(\frac{-1+\frac{2}{n^3}}{n+\frac{1}{n^2}}\right)$. En outre, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(-1 + \frac{2}{n^3}\right) = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(n + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{-1+\frac{2}{n^3}}{n+\frac{1}{n^2}} = 0$. Comme $x \to \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on conclut finalement que $\lim_{n \to +\infty} w_n = \cos(0) = 1$.

- $t_n = 2 + \frac{\sin(n)}{2n}$. On sait que $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $2 - \frac{1}{2n} \leq t_n \leq 2 + \frac{1}{2n}$. De plus, on constate que $\lim_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{2n}\right) = 2$. D'après le théorème des gendarmes, on obtient donc $\lim_{n \to +\infty} t_n = 2$.

Exercice bonus Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Pour montrer que cette suite converge, on va montrer qu'elle est bornée et monotone. On constate que la fonction $x \to \frac{4}{5}x + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $u_1 = 1$ et on a donc $u_1 \geq u_0$. D'après le théorème du cours $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Montrons maintenant que la suite est majorée. Prenons au hasard un nombre très grand, par exemple 200, et montrons par récurrence que c'est un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété

$$u_n \leq 200. \tag{P$_n$}$$

Initialisation : On a $u_0 = 0 \leq 200$, donc (P_0) est vérifiée.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la propriété (P_n) est vérifiée. Montrons que dans ce cas (P_{n+1}) l'est aussi. Comme (P_n) est supposée vraie, on a

$$u_n \leq 200.$$
$$\frac{4}{5}u_n \leq 160$$
$$\frac{4}{5}u_n + 1 \leq 161,$$

et donc

$$u_{n+1} \leq 161 \leq 200,$$

et finalement (P_{n+1}) est vérifiée.
Conclusion : La propriété (P_0) est vérifiée et on a hérédité donc (P_n) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 200, et donc elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie $l = \frac{4}{5}l + 1$. La seule solution de cette équation est 5 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.