Rattrapage

16 janvier 2014

Question de cours

1. Donnez la définition de deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donnez un exemple de suites adjacentes et montrez qu'elles le sont.

Exercice 1 Donnez les limites des suites réelles suivantes, définies pour $n \geq 1$.

$$u_n = \frac{-n^2+(-1)^n}{7n^2}, \quad v_n = \frac{5^n-2^n}{4^n}, \quad w_n = \sqrt{\frac{2n+\sin(\frac{1}{n})}{n^3}}, \quad t_n = -\frac{n^2\sin(n^2)}{2n^5-1}.$$

Exercice 2 Déterminez la limite des deux suites réelles suivantes

1. $u_n = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + ... + \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad$ où $\quad n \geq 1$.
2. $v_n = \frac{3n}{n^2+1} + \frac{3n}{n^2+2} + ... + \frac{3n}{n^2+n}$.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_nv_n}{2\,(u_n+v_n)}, \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{3\,(u_n+v_n)}{8}, \\ u_0 = 2, \\ v_0 = 3. \end{cases}$$

1. Calculez les couples (u_1, v_1) et (u_2, v_2).
2. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété
$$u_n > 0 \quad \text{et} \quad v_n > 0. \qquad (P_n)$$
3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $w_n = v_n - u_n$. Montrez que
$$w_{n+1} = \frac{3(v_n-u_n)^2}{8(v_n+u_n)}.$$
4. Montrez que $w_n \leq u_n + v_n$ et en déduire que $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{3}{8}w_n$.
5. Montrez par récurrence que $0 \leq w_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Qu'en concluez vous ?