

Interrogation 3

7 janvier 2014

Question de cours

1. Donnez la définition de deux suites adjacentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Donnez un exemple de suites adjacentes et montrez qu'elles le sont.

Exercice 1 Donnez les limites des suites réelles suivantes, définies pour $n \geq 1$.

$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{5n}, \quad v_n = \frac{4^n - 2^n}{4^n}, \quad w_n = \sqrt{\frac{2n + \sin(\frac{1}{n})}{n}}, \quad t_n = -\frac{n^2 \sin(n)}{2n^5 - 1}.$$

Exercice 2 Déterminez la limite des deux suites réelles suivantes

1. $u_n = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{n}}$, où $n \geq 1$.
2. $v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites réelles définies par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}, \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \\ u_0 = 2, \\ v_0 = 3. \end{cases}$$

1. Calculez les couples (u_1, v_1) et (u_2, v_2) .
2. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété

$$u_n > 0 \quad \text{et} \quad v_n > 0. \quad (P_n)$$

3. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $w_n = v_n - u_n$. Montrez que

$$w_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(v_n + u_n)}.$$

4. Montrez que $w_n \leq u_n + v_n$ et en déduire que $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n$.
5. Montrez par récurrence que $0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Qu'en concluez vous ?