

# Interrogation 5

7 mai 2015

## Question de cours

1. Soient les fonctions  $g(x) = \cos(x)$  et  $h(x) = \sin(x)$ . Montrez que  $g$  et  $h$  sont indépendantes.
2. On considère l'équation

$$y'' + ay' + by = f, \quad (\text{E})$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $y_0$  une solution de (E) et  $y_h$  une solution de l'équation homogène associée. Montrez que  $y = y_0 + y_h$  est solution de (E).

**Exercice 1** Calculez les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^\pi x \cos(x) dx, \quad J = \int_0^1 x^2 e^x dx, \quad K = \int_0^1 x \sqrt{x} dx.$$

**Exercice 2** On cherche à résoudre l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = \cos^2(x). \quad (\text{E})$$

1. Déterminez les solutions du problème homogène associé à (E).
2. Montrez que la fonction  $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} \cos(2x) - \frac{1}{10} \sin(2x)$  est solution de (E) (on rappelle que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a  $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ ). En déduire toutes les solutions de (E).

**Exercice 3** Résolvez les équations différentielles suivantes.

1.  $y'' - 4y' + 4y = \cos(x) + \sin(x)$ .
2.  $y'' - 2y' + 5y = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .
3.  $y'' + 4y' - 21y = (-32x - 4)e^x$ .