Interrogation 2 : correction

Questions de cours Dans le cours vous dis-je.

Exercice 1 Pour calculer I il suffit de faire une intégration par parties. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = sin(x)$. On a donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos(x)$. Une intégration par partie nous donne donc

$$\begin{aligned} I &= [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)dx \\ &= 0 + [\cos(x)]_0^\pi = -2. \end{aligned}$$

Pour J, on doit faire la même deux fois de suite. Dans un premier temps on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$. Donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} J &= \left[x^2e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx \\ &= e - \int_0^1 2xe^x dx. \end{aligned}$$

Ensuite on recommence avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^x$. On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$. Un nouvelle intégration par parties donne

$$\begin{aligned} J &= e - \left([2xe^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx\right) \\ &= -e + [2e^x]_0^1 \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

Pour calculer K, il suffit de remarquer que $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$, dont une primitive est la fonction $x \to \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Ainsi, on obtient

$$K = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Exercice 2

1. Le polynôme caractéristique de l'équation est $P(r) = r^2 - 2r + 2$, dont les racines sont $1 + i$ et $1 - i$. D'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont données par

$$y_h(x) = e^x \left(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\right), \quad \text{où} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. On a $f'(x) = \frac{1}{10}\sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x)$ et $f''(x) = \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x)$. Un petit calcul nous donne alors

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = \tfrac{1+\cos(2x)}{2} = \cos^2(x).$$

Exercice 3

1. Le polynôme caractéristique de cette équation est $p(r) = r^2 - 4r + 4$. Il a une racine double qui est 2. Les solutions du problème homogène sont donc de la forme

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \quad \text{où} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche maintenant une solution particulière sous la forme $y_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a $y_0'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et $y_0''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$. On a alors

$$y_0''(x) - 4y_0'(x) + 4y_0(x) = (3a - 4b)\cos(x) + (4a + 3b)\sin(x).$$

On cherche alors a et b tels que

$$\begin{cases} 3a - 4b = 1 \\ 4a + 3b = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{25} \\ b = -\frac{1}{25}. \end{cases}$$

Donc $y_0(x) = \frac{7}{25}\cos(x) - \frac{1}{25}\sin(x)$ est solution et les solutions de l'équation sont de la forme

$$y(x) = \tfrac{7}{25}\cos(x) - \tfrac{1}{25}\sin(x) + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \quad \text{où} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Le polynôme caractéristique de l'équation est $p(r) = r^2 - 2r + 5$ et ses racines sont $1 + 2i$ et $1 - 2i$. Les solutions sont donc de la forme

$$y(x) = e^x \left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right), \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La dérivée de y est donnée par

$$y'(x) = e^x \Big((C_1 + 2C_2)\cos(2x) + (-2C_1 + C_2)\sin(2x) \Big), \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour satisfaire les conditions initiales, il suffit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} -e^{\frac{\pi}{2}} C_1 = 2, \\ -e^{\frac{\pi}{2}} (C_1 + 2C_2) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2e^{-\frac{\pi}{2}}, \\ C_2 = 4e^{-\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

La solution de l'équation est donc

$$y(x) = e^{x-\frac{\pi}{2}}\left(-2\cos(2x) + 4\sin(2x)\right).$$

3. Le polynôme caractéristique de l'équation est $p(r) = r^2 + 4r - 21$ et ses racines sont -7 et 3. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme

$$y_h(x) = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{3x}, \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche maintenant une solution particulière sous la forme $y_0(x) = (ax+b)\,e^x$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On a $y_0'(x) = (ax+a+b)\,e^x$ et $y_0''(x) = (ax+2a+b)\,e^x$. On a alors

$$y_0''(x) + 4y_0'(x) - 21y_0(x) = (-16ax + 6a - 16b)\,e^x.$$

On cherche alors a et b tels que

$$\begin{cases} -16a = -32, \\ 6a - 16b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Donc $y_0(x) = (2x+1)\,e^x$ est une solution particulière et les solutions sont de la forme

$$y(x) = (2x+1)\,e^x + C_1 e^{-7x} + C_2 e^{3x}, \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$