Feuille d'exercices 1

Récurrence

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique réelle définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4, \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, que est le signe de u_n ? Montrez le par récurrence.
2. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $u_n = f(n)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer.
3. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation

$$v_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

   Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $v_n = 2n^2$.

Exercice 2 Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1.$

Exercice 3 Montrez que pour tout entier n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 4 Soit x un réel fixé $x \geq -1$. Montrez que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 5 Montrez que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{(n)}} < 2\sqrt{n}.$$

Exercice 6 Déterminez les entiers naturels n tels que $n^2 < n!$.

Exercice 7 Soit a et r deux réels. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r et de premier terme a.

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r, & n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = a. \end{cases}$$

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}.$$

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison r et de premier terme a donnée par

$$\begin{cases} u_{n+1} = ru_n, & n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = a. \end{cases}$$

1. Montrez que $u_n = f(n)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer.

2. Montrez par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}).$$

3. En utilisant la question précédente, montrez que

$$u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right).$$