Feuille d'exercices 5

Équations différentielles : épisode IV, Ultime carnage

Exercice 1 On considère l'équation
$$y'' - y' - 2y = 4e^{3x}. \tag{E}$$

1. Résolvez l'équation homogène associée à (E) et donnez deux solutions indépendantes y_1 et y_2 de cette équation homogène.
2. En cherchant une solution particulière, résolvez (E).
3. Soient C_1 et C_2 deux fonction C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrez que si C_1 et C_2 satisfont le système
$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = 4e^{3x}, \end{cases} \tag{S}$$
alors la fonction y définie par $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ est solution de (E).
4. Résolvez (S) et déduisez-en les solutions de (E).

Exercice 2 Résolvez les équations différentielles suivantes en cherchant une solution particulière puis en utilisant la méthode de variation des constantes.

1. $y'' + y' - 2y = x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y'' - 6y' + 9y = x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y'' + 1 = sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Résolvez l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$:
$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 1. \end{cases} \tag{E}$$

Exercice 4 On considère l'équation
$$y'' + 2y' + 2y = 2x + 4. \tag{E}$$

1. Résolvez l'équation homogène associée à (E).
2. Trouvez une solution particulière de (E) et donnez toutes les solutions de (E).
3. Utilisez la méthode de variation des constantes pour retrouver le résultat.
4. Qui fait le malin maintenant ?

Exercice 5 Résolvez l'équation différentielle suivante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}. \tag{E}$$

Exercice de déglingo On s'intéresse à l'équation différentielle à coefficients variables suivante sur $]0, +\infty[$:
$$x^2y'' + xy' - y = 2x. \tag{E}$$

1. Soit z la fonction définie par $z(X) = y(e^X)$. Quel est le domaine de définition de z ? Montrez que z satisfait sur son domaine de définition l'équation différentielle
$$z'' - z = 2e^x. \tag{E$_z$}$$
2. Résolvez (E$_z$) et déduisez-en les solutions de (E).
3. Calculez la solution de (E) telle que $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.