Feuille d'exercices 2

Suites : généralités et monotonie

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n, \\ u_0 = 4. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conjecturez l'expression de u_n et démontrez la par récurrence.
2. Donnez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et démontrez le.
3. Soit la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k}^{n} u_k$. Donnez l'expression de v_n et montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n, \\ u_0 = -2. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminez le signe de u_n et démontrez le par récurrence.
2. démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. Soit la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k}^{n} u_k$. Donnez l'expression de v_n et montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n, \\ u_0 = 4. \end{cases}$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante.

2. Démontrez que la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \sum_{k}^{n} u_k$ n'est ni croissante ni décroissante.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \\ u_0 = 6. \end{cases}$$

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{3}x + 2$. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et formuler une conjecture sur sa limite.
3. Déterminer le réel α tel que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + \alpha$ soit géométrique.
4. Calculer v_n et en déduire u_n.

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3, \\ u_0 = -1. \end{cases}$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante.
2. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et formuler une conjecture sur sa limite.
3. Déterminer le réel α tel que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + \alpha$ soit géométrique.
4. Calculer v_n et en déduire u_n.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, \\ u_1 = 1, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

1. Calculez les 5 premiers termes de la suite.
2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrez que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique et donnez son expression explicite.
3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Que vaut $\sum_{k=1}^{n} v_k$? Montrez le par récurrence.
5. En déduire l'expression de u_n.