Feuille d'exercices 3

Suites : monotonie et convergence

Exercice 1

1. Déterminez un majorant et un minorant pour les suites réelles suivantes, définies pour $n \geq 1$.

$$u_n = \frac{2}{n} + 4, \quad v_n = \frac{n}{2^n}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \quad z_n = \frac{4}{n!}.$$

2. Déterminez la monotonie des suites précédentes et leurs limites éventuelles.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 + \dfrac{1}{4}, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

1. En traçant les graphes des fonctions $x \to x^2 + \frac{1}{4}$ et $x \to x$, représentez les premiers termes de $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrez que $(u_n)_{n\geq 0}$ admet un minorant et un majorant.
3. Montrez que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
4. Montrez que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 3 Déterminez un entier n_0 à partir duquel les suites suivantes, definies pour $n \geq 1$, sont monotones.

$$u_n = n^2 - 6n - 7, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n} + n, \quad w_n = \frac{n^2}{n!}, \quad z_n = \frac{n!}{n^n}$$

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1. Montrez que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \geq 0$.
2. Montrez que $u_n \leq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Montrez que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
4. Montrez que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = -(u_n)^3, \\ u_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1. En traçant les graphes des fonctions $x \to -x^3$ et $x \to x$, représentez les premiers termes de $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrez que $u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle monotone à partir d'un certain rang ?
4. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $v_n = |u_n|$. Déterminez une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n, en distinguant les cas $u_n \geq 0$ et $u_n \leq 0$.
5. Étudiez la monotonie et la convergence de $(v_n)_{n\geq 0}$.
6. En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite à déterminer.