Feuille d'exercices 4
Limites finies et infinies

Exercice 1 Déterminez la limite des suites suivantes, définies pour tout $n \geq 1$.

$$u_n = 2n + \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{\cos(n)}{2n+4}, \quad w_n = \frac{n^2+3}{2n^2}, \quad z_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n}, \quad t_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2 Deuxième vague : déterminez la limite éventuelle des suites suivantes.

$$u_n = \frac{n}{3+\sin(n)}, \quad v_n = \frac{n^3+\cos(n)}{2n^2 + \frac{(-1)^n}{n}}, \quad w_n = n(-1)^n, \quad z_n = \frac{n\cos(n)}{\sqrt{n^4+1}}, \quad t_n = \cos\left(\pi \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right).$$

Exercice 3 Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \tfrac{1}{\sqrt{n}}.$$

En minorant $(u_n)_{n\geq 1}$ par une suite simple, déterminez sa limite.

Exercice 4 Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \tfrac{n}{n^2+1} + \tfrac{n}{n^2+2} + ... + \tfrac{n}{n^2+n}.$$

En appliquant le théorème des gendarmes, déterminez la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 5 Même question avec la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \tfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \tfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \tfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1. Montrez par récurrence que $u_n \geq 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 Vrai ou faux ? Dans le cas où l'assertion est vraie, démontrez là. Si elle est fausse, donnez un contre exemple.

1. Toute suite bornée est convergente.
2. Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
3. Toute suite non majorée converge vers $+\infty$.
4. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, alors $u_{n+1} - u_n$ converge vers 0.
5. Si $u_{n+1} - u_n$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente.
6. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, alors $|u_n|$ l'est aussi.
7. Si $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ est convergente, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ l'est aussi.