Feuille d'exercices 5
Suites adjacentes

Exercice 0 Montrez dans chaque cas que les suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes (même si c'est inutile dans ces cas là). Déterminez leur limite commune.œ

1. $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 2e^{\frac{1}{n}}$.
2. $u_n = \frac{n^3+1}{n^3}$ et $v_n = \frac{n}{n+2}$.
3. $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \tfrac{1}{n}.$$

Montrez que ces deux suites sont adjacentes. On peut montrer que leur limite commune est $\frac{\pi^2}{6}$, mais c'est pas si simple.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrez qu'elles sont adjacentes et en déduire la limite de $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par la relation

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

telles que $u_0 = -1$ et $v_0 = 1$.

1. Calculez les premiers termes de ces deux suites.
2. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = v_n - u_n$. Montrez que w_n est une suite géométrique dont on donnera l'expression. En déduire que $v_n \geq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudiez la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que ces suites sont adjacentes.
4. Que vaut $u_n + v_n$? En déduire le signe de u_n et v_n.
5. Quelle est la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En se servant de la question précédente, montrez que ces suites sont géométriques et retrouvez ce résultat.

Exercice 4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par la relation

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

telles que $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$.

1. Montrez que $u_n > 0$ et $v_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrez que $v_n < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrez que $u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{v_n - u_n}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par la relation

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

telles que $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

1. Calculez les premiers termes de ces deux suites.
2. Montrez par récurrence que $u_n < v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudiez la montonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrez que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
5. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $s_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$. Donnez l'expression de s_n en fonction de n.
6. En remarquant que $w_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$, donnez une relation entre s_n et u_n.
7. Donnez l'expression de u_n en fonction de n, calculez la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.