

Feuille d'exercices 1

La fonction exponentielle et ses potes

Première partie : la fonction exponentielle

Exercice 1 Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = e^{3x+4} (e^{-x-2})^2, \quad B = \frac{e^{x^2}}{e^{2x} e^{-1}}, \quad C = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} \times \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}, \quad D = e^{3x+5} (e^{-x+1})^3 (e^{2x-2})^2.$$

Exercice 2 Résolvez dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & e^{3x-2} = e^4. \\ 2. & e^{x^2+x} = 1. \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3. & e^{2x^2-5x+3} \leq e. \\ 4. & (e^{x(x^2+x)})^3 \leq e^{18x}. \end{array}$$

Exercice 3 Donnez l'ensemble de définition, étudiez la dérivabilité et dérivez les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f(x) = e^{x^2}, & g(x) = \sqrt{e^{-4x^5}}, & h(x) = e^{-\frac{x+1}{2x}}, \\ i(x) = \sqrt{e^{3x^2} - 1}, & j(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2}, & k(x) = \exp(e^x). \end{array}$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{4x}$.

1. Étudiez la dérivabilité de f et donnez sa dérivée.
2. Démontrez que f satisfait une équation différentielle linéaire.
3. On pose $g(x) = Cf(x)$, où $C \in \mathbb{R}$. Démontrez que g satisfait une équation différentielle linéaire.
4. Donnez des exemples de fonctions satisfaisant les équations différentielles suivantes :

$$1. \quad f' = -2f, \quad 2. \quad f' = 7f, \quad 3. \quad f' = kf, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Deuxième partie : la fonction logarithme népérien

Exercice 5 Exprimez en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants

$$A = \ln(8), \quad B = \ln\left(\frac{1}{4}\right), \quad C = \ln(16e), \quad D = \ln(\sqrt{2}), \quad E = \ln\left(\frac{64}{e^2}\right)$$

Exercice 6 Pour les fonctions suivantes, donnez les domaines de définitions, étudiez la dérivabilité et calculez la dérivée.

$$f(x) = \ln(\sqrt{x-1}), \quad g(x) = \ln(x^2 + 3x - 4), \quad h(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right), \quad j(x) = x \ln(x) - x.$$

Exercice 7 Calculez les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\ln(x))^2), & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^{3x} - 1), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - x + 2}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(1 + e^x)), & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1 + e^x)). \end{array}$$

Exercice 8 Résolvez dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \quad e^{2+\ln(x)} > 3. & 3. \quad \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right). \\ 2. \quad (e^x - 2)(e^x - 6) = 0. & 4. \quad \ln(1 + e^x) + \ln(1 - e^x) \geq \frac{1}{2}. \end{array}$$