Feuille d'exercices 2

Équations différentielles : épisode I

Exercice 1 Trouvez une primitive des fonctions suivantes, définies sur un intervalle que l'on précisera.

$$f_1(x) = 4x^5 - 4x, \qquad f_2(x) = \sqrt{1+x}, \quad f_3(x) = \tan(x), \quad f_4(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

$$f_5(x) = 5\sin(x)\cos(x), \quad f_6(x) = \ln(x), \quad f_7(x) = \frac{e^{3x}}{(e^{3x}+2)^4}, \quad f_8(x) = \frac{-2x}{4-x^2}.$$

Exercice 2 Résolvez les équations différentielles homogènes suivantes.

1. $y' + 7y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' - 2y = 0$ et $y(0) = 2$, sur $\mathbb{R}$.
3. $x^2y' + y = 0$, sur $]0, +\infty[$.
4. $y' + \frac{t}{1+t^2}y = 0$ et $y(0) = -3$, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit l'équation différentielle

$$y' + x^2y = 1 + x^2 + x^3 \tag{E}$$

1. Donnez les solutions de l'équation homogène associée.
2. Trouvez une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).
4. Donnez la solution y telle que $y(0) = -2$.
5. Donnez la solution y telle que $y(1) = 1$.

Exercice 4 En cherchant à chaque fois une solution particulière, résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $y' + 2y = e^x$, 2. $y' - 5y = x$, 3. $y' + y = 2\sin(x)$,

4. $y' + 7y = \cos(3x)$, 5. $y' - 2y = xe^x$, 6. $y' + 3y = x + e^{-2x}$.

Exercice 5 On se propose d'étudier les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation

$$y^{'} - \frac{1}{x}y - x^2y^2 = 0. \tag{E}$$

1. On pose $z = \frac{1}{y}$. Montrez que z satisfait l'équation différentielle

$$z^{'} + \frac{1}{x}z = -x^2. \tag{F}$$

2. Trouvez une solution particulière de (F) sous la forme $z(x) = ax^3$, avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Calculez les solutions de (F).
4. Déduisez les solutions de (E) ainsi que leur intervalle de définition.
5. Calculez la solution de (E) telle que $y(1) = 1$.

Exercice 6 On considère l'équation différentielle

$$y^{'} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{E}$$

1. Déterminez les solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. Montrez que $y_0(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est une solution de (E).
3. Déduisez en toutes les solutions de (E) et donnez la solution telle que $y(1) = 21$.