Feuille d'exercices 3

Équations différentielles : épisode II (la revanche)

Exercice 1 Résolvez les équations différentielles suivantes sur l'intervalle précisé.

1. $y^{'} - 2xy = -2x$, où $x \in \mathbb{R}$.
2. $y^{'} + \cos(x)y = e^{-\sin(x)}$ tel que $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
3. $y^{'} - \frac{1}{x}y = \cos(x^2)$, où $x \in]0, +\infty[$ (faire aussi le cas $x \in]-\infty, 0[$).
4. $y^{'} + 2y = \frac{1}{(1+e^{2x})^3}$ tel que $y(0) = 0$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes de deux façon différentes : en cherchant une solution sous une forme particulière et en utilisant la méthode de variation de la constante.

1. $y^{'} + 4y = 3$.
2. $y^{'} - 3y = xe^{3x}$.
3. $y^{'} + y = \cos(x)$.
4. $2y^{'} - y = -x^2 + 5x$.

Exercice 3 On s'intéresse au problème suivant

$$\left(x^2 - 1\right) y^{'} + xy = x. \tag{E}$$

1. Sur quels intervalles peut-on résoudre (E) ?
2. Résolvez l'équation homogène associée à (E) sur chacun des intervalles trouvés à la question 1.
3. En utilisant une méthode de variation des constantes, résolvez (E) sur chacun des intervalles trouvés à la question 1.
4. Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = 2$?
5. Existe-t-il une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $xy^{'} + y = \frac{x}{1+x^2}$ tel que $y(1) = 2$ sur $]0, +\infty[$.
2. $y^{'} + \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y^{'} + \tan(x)y = cos(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. $y^{'} + x^2 y = x^2 e^{-x^3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Donnez l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes.

1. $y^{''} - y^{'} - 2y = 0$.
2. $y^{''} - 3y^{'} - 28 = 0$.
3. $4y^{''} - 4y^{'} + y = 0$.
4. $y^{''} + y = 0$.