

Feuille d'exercices 3

Équations différentielles : épisode III (le retour du jeudi)

Exercice 1 En effectuant une intégration par parties, calculez les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(2x) dx, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx.$$

Exercice 2 Résolvez les problèmes suivants.

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y'' - 2y' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 3 Soit l'équation

$$y'' - 2y' - 3y = (5t - 1)e^{-2t}. \quad (\text{E})$$

1. Résolvez l'équation homogène associée à (E).
2. Trouvez une solution particulière de (E).
3. Donnez l'ensemble des solutions de (E).
4. Donnez la solution telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$.

Exercice 4 Résolvez l'équation différentielle suivante.

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 7 \cos(t) - \sin(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Exercice 5 Résolvez l'équation différentielle suivante.

$$y'' + y' + y = te^{3t}. \quad (\text{E})$$

Exercice 6 Dans une épreuve de tir à la catapulte, le but est de toucher une cible à 50 mètres de là. Les projectiles homologués par la fédération pèsent 10kg, et l'on suppose que le point de départ de ces derniers est au niveau du sol. Pendant leur trajet, les projectiles sont soumis à leur poids, et on néglige les frottements engendrés par la friction de l'air. Notre catapulte est de bonne facture, donc on suppose que l'on vise toujours droit.

1. Faites un schéma en deux dimensions de la situation.
2. On note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la position du projectile au temps $t \geq 0$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont l'abscisse et l'ordonnée du projectile à l'instant $t \geq 0$. Que valent $\gamma(0)$, $x(0)$ et $y(0)$?
3. Selon le réglage de la catapulte, on peut influencer sur la direction et la vitesse du projectile au départ, ce qui revient à choisir $x'(0)$ et $y'(0)$ (ou $\gamma'(0)$). En utilisant le principe fondamental de la dynamique et en supposant que la constante de Newton g vaut 9.81, établir deux équations différentielles satisfaites par x et y et résolvez les.
4. En fonction de $y'(0) > 0$ et $x'(0) > 0$, déterminez le temps $t_{bam} > 0$ auquel le projectile retombe sur le sol. que vaut $x(t_{bam})$?
5. Choisissez $x'(0)$ et $y'(0)$ de sorte que le projectile retombe sur la cible.
6. Après avoir touché le sol, le projectile rebondit, et repart avec un vecteur vitesse $\gamma'(t_{bam})$ égal à la moitié du vecteur vitesse initial. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, établissez deux équations différentielles satisfaites par x et y pour $t \geq t_{bam}$ et résolvez les.
7. Déterminez, en fonction de $x'(0)$ et $y'(0)$ le temps $t_{bim} > t_{bam}$ auquel le projectile touche une seconde fois le sol. Que vaut $x(t_{bim})$?
8. Un juge-arbitre imprudent s'est placé 20 mètres après la cible. Est-il possible de choisir $x'(0)$ et $y'(0)$ de sorte que notre projectile rebondisse sur la cible et retombe sur le juge-arbitre.