S2 PeiP — Orsay 2014-2015

Mathématiques

Feuille d'exercices n°1

Intégrales multiples

Exercice 1 - *Intégrale et aire sous la courbe représentative.*

Soit a, b des réels positifs. Calculer et interpréter géométriquement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^a bx dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\,.$$

Exercice 2 - *Dessins de domaines du plan.*

Représenter les domaines suivants du plan :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leq x+1,\ 0 \leq y,\ y+2x \leq 4\}\,,\\
D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq -2,\ -1 \leq y \leq 1,\ y \geq x-3\}\,,\\
D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq 1,\ y \leq x^2+1,\ y \geq 2x,\ y \geq -2x\}\,,\\
D_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \leq \sqrt{3}\,x,\ x \leq \sqrt{3}\,y\}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 3 - *Découpages en tranches.*

Pour chaque domaine D de l'exercice précédent, et toutes les valeurs des paramètres réels a et b, déterminer les tranches verticales $D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = a\}$ (vide ou pas ? extrémités ?). Déterminez de même les tranches horizontales $D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = b\}$.

Exercice 4 - *Calculs d'aire et premières intégrales doubles.*

1. Calculer l'aire des domaines D_i de l'exercice 6 pour $i = 1,\ 2,\ 3$.

2. Calculer les intégrales doubles $\displaystyle\iint_{D_i} x\, dxdy$ pour ces mêmes domaines.

3. Donner les abscisses des centres de gravité des domaines précédents, supposés de densité constante (homogènes).

Exercice 5 - *Quelques intégrales doubles.*

Dessiner les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle I_1 = \iint_D (1-x-y)dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x+y \leq 1\}$,

2. $\displaystyle I_2 = \iint_D \frac{xy^2}{1+x^2}dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$,

3. $\displaystyle I_3 = \iint_D e^{y-x}dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y-x \leq 1\,,\ x \leq 0\,,\ y \geq 0\}$ (extrait contrôle 2012),

4. $\displaystyle I_4 = \iint_D \frac{2x}{1+x^2+y}dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 6 - *Symétries dans une intégrale.*

Soit $f : R_a \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le carré $R_a = [-a,a] \times [-a,a] \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer, par exemple à l'aide de Fubini, que

$$\iint_{R_a} f(x,-y)dxdy = \iint_{R_a} f(x,y)dxdy\,.$$

Montrer de même que

$$\iint_{R_a} f(-x,y)dxdy = \iint_{R_a} f(x,y)dxdy \text{ et } \iint_{R_a} f(-x,-y)dxdy = \iint_{R_a} f(x,y)dxdy.$$

2. Montrer que $\displaystyle\iint_{R_a} f(x,y)dxdy = \iint_{R_a} f(y,x)dxdy$.

Indication. Comparer les sommes de Riemann des deux fonctions, ou utiliser que $(x,y)\mapsto(y,x)$ est une isométrie.

3. *Illustration.* Calculer

$$\iint_{R_{2014}} x^{20}y^{15}\sin(x^{20}y^{14})\,dxdy \quad\text{et}\quad \iint_{R_{2014}} (x-y)^{2015}e^{xy}\,dxdy\,.$$

Exercice 7 - *Domaines en coordonnées polaires.*

Pour chacun des domaines suivants $D_i \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ donner un domaine $U_i \subset \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\}$ tel que l'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$ réalise une bijection de $U_i\setminus\{r=0\}$ sur $D_i\setminus(0,0)$:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ x^2+y^2\le 1\,,\ y\ge 0\}\,,\\
D_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ 1\le x^2+y^2\le 4\,,\ x+y\ge 0\}\,,\\
D_3 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ \frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 2\,,\ y\le\sqrt{3}x\,,\ x\le\sqrt{3}y\},\\
D_4 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ 0\le y\le x\le 1\}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 8 - *Calculs d'intégrales en coordonnées polaires.*

1. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\le R^2\}$.

2. Calculer l'aire des domaines D_i de l'exercice 7.

3. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 1\le x^2+y^2\le 4\,,\ 0\le x\,,\ y\le x\}$.

4. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2-2x\ge 0\}$. (Pour dessiner D, remarquer que $x^2+y^2-2x=(x-1)^2+y^2-1$).

Exercice 9 - (Extrait contrôle 2012)

Pour a et b réels, on note $D(a,b)$ le disque de centre $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et de rayon 1.

1. Calculer $J_1=\iint_{D(0,0)} xdxdy$, $J_2=\iint_{D(0,0)} ydxdy$ et $J_3=\iint_{D(0,0)}(x^2+y^2)dxdy$.

2. En déduire, en utilisant une translation, un calcul de $\displaystyle I_{a,b}=\iint_{D(a,b)}(x^2+y^2)\,dxdy$ en fonction de a, b et des intégrales précédentes. (Commentaire : cette expression intervient par exemple dans l'énergie cinétique du disque $D(a,b)$ en rotation autour de $(0,0)$ (lancer de disque).)

Exercice 10 - *Centre de gravité.*

Calculer le centre de gravité (ou d'inertie) des domaines D suivants, supposés homogènes :

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ où $a,\, b \in \mathbb{R}^*$.

2. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ où $a,\, b \in \mathbb{R}^*$.

3. $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ |y| \geq ax\}$ où a est un réel > 0.

4. $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x^2 + y^2 \leq 9\,,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.

Exercice 11 - *Intégrales triples.*

1. Représenter le domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ x+y+z \leq 1\}$, puis calculer l'intégrale

$$I = \iiint_D z\, dxdydz\,.$$

2. Calculer en fonction du réel $\theta \geq 0$ l'intégrale suivante :

$$I(\theta) = \iiint_{[0,\theta]\times[0,\theta]\times[0,\theta]} \sin(x+y+z) dxdydz.$$

Quel est le signe de $I(1)$?

Exercice 12 - *Volumes.*

1. Calculer le volume d'une pyramide P de hauteur h et de base rectangulaire de longueur ℓ et de largeur L.

2. Représenter $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -1 \leq z \leq 1\,,\ x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$ et calculer son volume.

3. Calculer le centre de gravité de D, supposé de densité constante (homogène).

Exercice 13 - *Coordonnées sphériques.*

Utiliser un changement de variable pour calculer l'intégrale de f sur le domaine D avec

1. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ et $f(x,y,z) = xyz$,

2. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ et $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.