S2 PeiP — Orsay 2014-2015
Mathématiques

Feuille d'exercices n°2

Systèmes linéaires, sous-espaces vectoriels et équations cartésiennes

Exercice 1 - Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=-1 \\ 5x-4y+8z=-4 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ -x+2y-z-2t=1 \\ -3x+7y-3z-3t=2 \\ -x-z-8t=3 \end{cases}$$

Exercice 2 - *Spécial Saint-Valentin.*

Charles a prévu d'acheter des fleurs à Catherine. Comme il est d'un naturel plutôt précis, il prévoit de dépenser exactement 24 € en achetant précisément deux douzaines de fleurs. Le fleuriste lui propose des iris (à 3 €), des roses (à 2 €) et des oeillets (à 0,5 €). Charles sait que Catherine adore les iris ; que doit-il faire ?

Exercice 3 - *Systèmes à paramètres.*

Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant les valeurs de m, résoudre :

$$(S_1)\begin{cases} x+my=0 \\ mx+y=0 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+y+3z=1 \\ -x+y+z=1 \\ x-y+mz=1 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x-y+5z=2 \\ 2x-5y+4z=m+2 \end{cases}$$

Exercice 4 - *Vrai-faux.* Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Il existe un système linéaire de trois équations et trois inconnues qui possède exactement trois solutions ?

2. Il existe un système à quatre équations et trois inconnues qui possède exactement une solution ?

3. Il existe un système à trois équations et quatre inconnues qui possède exactement une solution ?

4. Un système linéaire avec strictement moins d'inconnues que d'équations possède, ou bien une infinité de solutions, ou bien aucune ?

5. Un système linéaire avec strictement moins d'équations que d'inconnues possède, ou bien une infinité de solutions, ou bien aucune ?

Exercice 5 - *Rang d'un système linéaire.*

1. Déterminer le rang du système suivant en fonction des valeurs des paramètres a, b, c, α, β, γ :

$$(S)\begin{cases} x+ay+a^2z=\alpha \\ x+by+b^2z=\beta \\ x+cy+c^2z=\gamma \end{cases}$$

2. Discuter l'existence et l'unicité des solutions, sans les calculer.

Exercice 6 - *Équations et systèmes générateurs.*

1. Donner deux vecteurs engendrant le plan P d'équation $x + 2y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que la partie $E = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,,\ x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par trois vecteurs.

Exercice 7 - *Intersection de deux plans dans $\mathbb{R}^3$.*

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux plans vectoriels d'équation cartésienne

$$P_1 = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z)\,,\ x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad P_2 = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z)\,,\ x - y - 3z = 0\}.$$

1. Montrer que l'intersection de P_1 et P_2 est une droite dont on donnera un vecteur directeur.

2. Même question avec les plans affines P_1' et P_2' d'équation $x + y + z = 1$ et $x - y - 3z = -1$.

Exercice 8 - *Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.*

1. soit $\overrightarrow{u} = (a, b)$ un vecteur non nul du plan $\mathbb{R}^2$. Donner une équation cartésienne de la droite D engendrée par $\overrightarrow{u}$.

2. Donner une équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 2)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1, 2, 1)$.

3. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$.

Exercice 9 - *Famille génératrice d'un espace paramétré.*

1. Montrer que l'ensemble E de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$E = \{\overrightarrow{u} = (\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3\,, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3\,, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \mid \lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3 \text{ réels quelconques}\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par trois vecteurs.

2. A-t-on $E = \mathbb{R}^3$?

Exercice 10 - *Conditions de compatibilité et systèmes d'équations cartésiennes.*

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le plan $P = \text{Vect}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{v} = (1, 2, -3, 1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = (1, -1, 1, -3)\,.$$

1. Montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ est dans P ssi un certain système linéaire $(S_{\overrightarrow{u}})$ est compatible.

2. Montrer que le système $(S_{\overrightarrow{u}})$ est compatible ssi $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ est solution d'un certain système linéaire homogène (S).

3. En déduire un système d'équations cartésiennes de P.

Exercice 11 - *Intersection de plans dans $\mathbb{R}^4$.*

On considère $\overrightarrow{v_1} = (1, 2, 3, 4)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, -2, 3, -4)$ et $P = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

1. Combien existe-t-il de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{u} = (x, 1, y, 1) \in P$?

2. Qu'en est-il si on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = (x, 1, 1, y) \in P$?