S2 PeiP | Orsay 2014-2015
Mathématiques

Feuille d'exercices n°3

Bases, dimension, sommes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 1 - *Famille libre ou liée.*

Soient $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (4, 1, 4)$ et $\overrightarrow{v_3} = (2, -1, 4)$.

1. Vérifier que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$, ainsi que pour $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$.

2. La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire.

Exercice 2 - *Coordonnées dans une base.*

1. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercice 3 - *D'après annales PeiP.*

Pour a réel donné, on considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)\ , \quad \overrightarrow{v_2} = (1, 2, 3)\ , \quad \overrightarrow{v_3} = (1, 1, -1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_4} = (2a, a + 1, 4)\,.$$

1. Montrer que $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une équation du plan P engendré par $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.

3. Pour quelles valeurs de a la famille $(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? (On pourra utiliser la question précédente.)

4. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v_4}$ dans la base B.

5. Pour quelles valeurs de a la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_4})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? (On pourra utiliser la question précédente.)

Exercice 4 - *Extraction de base d'un système générateur.*

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 2, 0),\ \overrightarrow{v_2} = (0, 2, 1, 1),\ \overrightarrow{v_3} = (1, 1, 3, 1),\ \overrightarrow{v_4} = (2, 0, 5, 1).$$

1. La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ est-elle libre ? Quel est son rang ?

2. Soit $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Déterminer la dimension de E et extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Exercice 5 - *Dimension et base d'un sev défini par un système d'équations.*

1. Déterminer la dimension et donner une base du sev de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y + 3z - 4t = 0\}.$$

2. Même question avec

$$F = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z + 2t = 0 = -2x - 4y + z - t\}.$$

Exercice 6 - *Dimension et égalité d'espaces.*

Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E = \mathrm{Vect}((-1,3,2),(-2,-1,1)) \text{ et } F = \mathrm{Vect}((0,7,3),(-7,0,5))$$

sont égaux. (Remarquer que $\dim E = \dim F$.)

Exercice 7 - *Longueur des suites libres et génératrices.*

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

1. Que dire de $\dim E$?

2. Dans cette question, on suppose que E est engendré par une famille $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$. Montrer que toute famille de 4 vecteurs de E est liée.

3. Dans cette question, on suppose que E contient une famille libre $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$. Montrer qu'aucune partie de E à 2 éléments n'est génératrice et qu'une famille génératrice de E à 3 éléments en est une base.

Exercice 8 - *Base incomplète.*

1. Soient $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1,2,1)$. Compléter la famille libre $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Même question avec $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (2,2,-1)$.

Exercice 9 - *Supplémentaire.*

On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - 2y - z + t = 0\}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E.

2. Donner un supplémentaire de E.

3. Mêmes questions avec

$$F = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y - z + 2t = 0 = x + y + 2z + t = y + z + t\}.$$

Exercice 10 - Pour a réel donné, on considère dans $\mathbb{R}^4$ les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = x - y + t = 0\},$$

et $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ avec $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0,a,0,1)$.

1. Déterminer une base de E.

2. Pour quelles valeurs de a a-t-on $E \cap F = \{0\}$?

3. Pour quelles valeurs de a les espaces E et F sont-ils supplémentaires ?

4. Donner une base de $E + F$.

Exercice 11 - *Somme de deux espaces.*

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ y + z + t = 0\} \text{ et } F = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E et F.

2. Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.

3. Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe ?