S2 PeiP — Orsay 2014-2015
Mathématiques

Travaux pratiques de math sur Scilab. Feuille 2.

Chaînes de Markov, évolution de systèmes

Exercice 1 - *Chaîne de Markov et météo.*

On considère un modèle très simple de prévision météo. On suppose que chaque jour, il y a trois états possibles : du soleil, des nuages ou de la pluie. Par des études statistiques, on estime que la météo du lendemain dépend de celle du jour selon les probabilités suivantes

	Soleil	Nuages	Pluie
Soleil	0.7	0.3	0.3
Nuages	0.2	0.3	0.2
Pluie	0.1	0.4	0.5

1. Entrer dans Scilab la matrice de transition M correspondante.

La météo du jour n est décrite par un vecteur $X(n) = (x_S(n), x_N(n), x_P(n))$ rassemblant les probabilités du temps. On rappelle que $X(n) = MX(n-1) = M^n X(0)$ dans ce modèle.

2. On suppose qu'il fait beau le 1er mai. Quelles sont les différentes probabilités de temps les 2, 3, 4, 7 et 14 mai ? On peut présenter tous les résultats d'un coup en « concaténant » les colonnes : la commande `[A,B]` met les matrices A et B de même hauteur l'une dernière l'autre.

3. Faire les mêmes calculs avec l'hypothèse de temps nuageux ou pluvieux le 1er mai.

4. Que constate-t-on ? Est-ce cohérent avec le théorème de Perron-Frobenius (voir cours) ? Que vaut l'état stationnaire de ce système et que représente-t-il concrètement ?

Exercice 2 - *Modèle d'épidémie.*

On étudie numériquement le modèle d'épidémie introduit en cours. Chaque individu peut être malade (M), immunisé (I), ou sain mais non immunisé (S). D'une semaine à l'autre,

- 20% des personnes malades le restent, 80% guérissent et sont immunisés ;
- 90% des immunisés le restent, 10% ne le sont plus mais restent sains (mutation du virus par exemple) ;
- 50% des personnes saines mais non immunisées le restent, 50% tombent malades.

1. Écrire la matrice de transition M de cette chaîne de Markov.

2. On suppose que toute la population est saine mais non immunisée à l'arrivée de l'épidémie. Calculer les différents vecteurs d'états de santé de la population au bout de deux semaines, d'un mois, de deux mois, de trois mois.

3. Calculer M^2, M^4, M^8, M^{12}. Que constate-t-on sur les différentes colonnes de ces matrices ?

On rappelle que le l'état d'équilibre satisfait $MX = X \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0$, où I_3 est la matrice identité qui s'obtient par `eye(3,3)` avec Scilab.

4. Résoudre cette équation avec la commande `kernel`. Pour obtenir une loi de probabilité, il faut normaliser le résultat de sorte que la somme des coefficients de X soit 1. La commande `sum`(X) calcule cette somme. Une fois l'épidémie « installée », quelle proportion de la population est malade, immunisée, saine ?

Exercice 3 - *Évolution d'un système ouvert avec entrées-sorties.*

D'une année à l'autre, les populations de deux villes voisines A et B évoluent selon les statistiques suivantes :

- 20% des habitants de A déménagent vers B, et 10% des habitants de B vont vers A ;
- 20% des habitants de chaque ville quittent la région ;
- Les villes A et B accueillent chacune 100 nouveaux habitants venant d'une autre région.

1. On note $X(n) = (x_A(n), x_B(n))$ le vecteur des populations l'année n. Montrer que l'évolution de $X(n)$ satisfait une relation de récurrence du type $X(n+1) = AX(n) + E$, où A est une matrice fixe, et E un vecteur fixe.

2. Écrire une fonction Scilab qui calcule $X(n)$ à l'aide de $X(0)$.

3. Montrer numériquement que les populations tendent à se stabiliser vers des populations limites. Cette limite dépend-elle de $X(0)$?

4. Retrouver directement cet état stationnaire X en résolvant l'équation $X = AX + E \Leftrightarrow (I_2 - A)X = E$.

Exercice 4 - *Modèle de Leslie d'évolution d'une population par tranche d'âge.*

Le modèle de Leslie est un modèle démographique dont l'utilisation est très répandue en dynamique des populations.

On traite ici un exemple simple d'une population de saumons avec trois classes d'âge d'une durée de un an. Le taux de survie des saumons d'une année à l'autre est de 53% pour la première classe d'âge, de 22% pour la seconde, et nul pour la troisième. Chaque femelle dans les deuxièmes et troisièmes classes d'âge donne naissance respectivement à 4 et 5 femelles.

1. On note $X(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))$ la population femelle des trois classes l'année n. Montrer que $X(n+1) = LX(n)$ où L est une matrice fixe. L est-elle la matrice de transition d'une chaîne de Markov ?

2. On considère une population initiale $X(0) = (12, 12, 12)$. Calculer $X(n)$ pour $n \leq 20$. La population se stabilise-t-elle ?

Il est utile pour la suite de fabriquer une matrice `X` dont la n-ème colonne est $X(n)$, par exemple en créant une fonction qui concatène tous les $X(n)$.

3. Représenter graphiquement $\log X(n)$ en fonction de $0 \leq n \leq 20$. Qu'observe-t-on ?

4. Représenter graphiquement l'évolution de la distribution de population entre les trois classes d'âge (en pourcentage). Que se passe-t-il ? Vérifier pour différentes valeurs de $X(0)$ que la distribution limite ne change pas.

En pratique, la commande `S=sum(X,''r'')` fait la somme de chaque colonne de la matrice `X`. On peut ensuite normaliser chaque colonne de `X` (pour avoir des pourcentages) en faisant la division terme à terme `X./R` avec `R=[S;S;S]` ici car `X` à 3 lignes.

5. Représenter graphiquement les taux de croissance annuelle de la population `S(n+1)/S(n)` et vérifier numériquement qu'ils convergent.