Exos bonus

Exercice 1 Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (z, x - y)$.

1. Montrez que f est une application linéaire et donnez sa matrice.
2. Déterminez $Ker(f)$. L'application est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminez $Im(f)$.
4. Soit maintenant l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(u, v) = (u - v, u + v, v)$. Montrez que g est une application linéaire et donnez sa matrice.
5. Déterminez $Ker(g)$. L'application g est-elle injective ? Surjective ?
6. On s'intéresse maintenant à l'application composée $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sans faire de calcul, peut-on dire si $g \circ f$ est surjective ? Qu'en est-il de l'injectivité ?
7. Calculez la matrice de $g \circ f$.

Exercice 2 Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez $Im(f)$ et $Im(g)$. Ces deux espaces sont-ils supplémentaires ?
2. Calculez $Im(f) \cap Im(g)$.
3. On définit l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ par $h(u) = f(u) + \alpha g(u)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez la matrice de h.
4. Déterminez en fonction de α le rang de h ainsi que $dim\,(Ker(h))$.

Exercice 3 Soit P_1 le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1,1,0)$ et $v_1 = (-1,-1,1)$ et P_2 le plan engendré par $u_2 = (1,1,2)$ et $v_2 = (2,1,-1)$.

1. Donnez une équation cartésienne des plans P_1 et P_2.
2. Déterminez $P_1 \cap P_2$.
3. Soit D, la droite de P_2 orthogonale à u_1. Donnez un vecteur directeur u_D de D et montrez que $B = (u_1, v_1, u_D)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur P_1 parallèlement à D. Donnez la matrice de p dans la base B.
5. Calculez la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 4 On s'intéresse à la résolution du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 3z(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont trois fonctions C^1 définies sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $X(t)$ le vecteur défini par $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Montrez que X satisfait l'équation $X'(t) = AX(t)$, où A est une matrice à déterminer. On note f l'application linéaire associée à A.
2. Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (-1,-1,1)$. Montrez que $B = (u_1, u_2, u3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En calculant explicitement $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$, donnez la matrice D de f dans cette base.
3. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$, où P est la matrice de passage de la base canonique à B. Quelle équation différentielle satisfait Y ?
4. Résolvez cette équation et déduisez en $X(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.