Feuille d'exercices 1

1. Algèbre linéaire : généralités

1.1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (\ 2x + y - z,\ 3x - 2y + 4z\ )$$

Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, puis lorsque dans $\mathbb{R}^3$ on utilise à la place de la base canonique la base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (1, 1, 1) \qquad v_2 = (1, 1, 0) \qquad v_3 = (1, 0, 0)$$

1.2. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ associée. Déterminer une base, donner des équations et préciser la dimension de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Mêmes questions pour l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

1.3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(1, 0, 0) = (-1, -6, 9) \qquad f(0, 1, 0) = (2, 6, -6) \qquad f(0, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{\ u,\ f(u) = 2u\ \}$ est un plan dont on donnera l'équation et une base.
3. Montrer que $\ker(f)$ et E sont supplémentaires.
4. Donner la matrice de f dans une base formée de bases de $\ker(f)$ et de E.

1.4. Soit $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (5, -2, 2)$, $v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de R^3. Écrire la matrice de passage de la base canonique B_{can} à la base B, puis celle de B à B_{can}.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans B_{can} est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice M de f dans la base B. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis A^n.

2. Déterminants

2.1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 8 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} -2 & x & 1 & 3 \\ x & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & x \\ 1 & -2 & x & 3 \end{vmatrix}$$

2.3. Sachant que les nombres 1067, 1455, 582, 9700 sont divisibles par 97, montrer sans le calculer que le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ 9 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est un nombre entier divisible par 97.

2.4. La famille $(0, -1, 1, 0)$, $(1, 2, -1, 1)$, $(0, 1, 7, -2)$, $(3, -1, 2, 0)$, formée de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, est-elle une base ?

2.5. Considérons les vecteurs $u = (1, -2, 3, 0)$, $v = (0, 2, -1, 1)$ et $w = (-1, 0, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^4$. Démontrer qu'ils forment une famille libre, en déduire qu'ils engendrent un hyperplan et donner une équation cartésienne de cet hyperplan.

2.6. Pour quelles valeurs du nombre réel a le système linéaire

$$\begin{cases} ax & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & az & = & 3 \end{cases}$$

admet-il une solution unique ?

2.7. Soit λ un paramètre réel. Considérons la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda+3 & -2 \\ 1 & -\lambda-2 & 0 & -1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme $P(\lambda) = \det(M_\lambda)$.
2. Déterminer les nombres réels λ pour lesquels la matrice M_λ est inversible.
3. Calculer le rang de M_λ en fonction des valeurs de λ.

2.8. Soient n un entier impair supérieur ou égal à 3, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité d'ordre n.

1. Exprimer $\det(-A)$ en fonction de $\det(A)$.

2. Montrer que $A^T = -A$ implique $\det(A) = 0$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de matrice A telle que $A^2 = -I_n$.

Exercices supplémentaires.

2.9. On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

1. Calculer $D(a,b,c)$.
2. Montrer que sans changer la valeur de $D(a,b,c,d)$, on peut remplacer sa dernière ligne par $f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
3. En choisissant astucieusement f de sorte que la dernière ligne n'ait qu'un seul terme non nul, et en développant, exprimer $D(a,b,c,d)$ en fonction de $D(a,b,c)$. En déduire la valeur de $D(a,b,c,d)$.
4. Peut-on généraliser ?

2.10 Posons $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ et

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2 Δ_3.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_n = n + 1$.

3. Diagonalisation

3.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser P_f, le polynôme caractéristique de f.
2. Déterminer les valeurs propres de f et une base de chaque espace propre de f.
3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
4. Diagonaliser la matrice A sur $\mathbb{R}$: on précisera les matrices D (diagonale) et P (inversible) ainsi que la formule qui relie A, D et P.

Mêmes questions pour chacune des matrices suivantes à la place de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -6 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? (Réfléchir pour éviter les calculs).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$? Si oui, les diagonaliser.
On précisera les matrices D (diagonale) et P (inversible) ainsi que la formule qui relie A_i, D et P.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4. Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ la possibilité de diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

3.5. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.
La matrice A est à coefficients réels : utiliser le lien entre E_λ et $E_{\overline{\lambda}}$ pour calculer moins.

Exercices supplémentaires.

3.6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{ii} = \alpha \ \text{ pour tout } i, \text{ et } a_{ij} = 1 \ \text{ pour tout } i \neq j$$

1. On écrit $A = (\alpha - 1)I_n + B$ (où I_n est la matrice identité d'ordre n et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
   Montrer, avec très peu de calculs, que B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Diagonaliser B sur $\mathbb{R}$.
2. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.

3.7. Soit $n \geq 2$, λ_0 un réel donné et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_0 I_n) = 1$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle $T = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est une matrice triangulaire supérieure.
2. Préciser le lien entre $\mathrm{trace}(A)$ et $\mathrm{trace}(T)$.
   Déterminer les éléments de la diagonale de T en fonction de λ_0 et $\mathrm{trace}(A)$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur $\mathrm{trace}(A)$) pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Suites définies par des récurrences linéaires

4.1. Notons $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les deux suites réelles définies par leur premier terme u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - v_n \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
2. Exprimer $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ en fonction de A et de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3. Diagonaliser la matrice A et en déduire A^n.
4. Donner l'expression générale de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur u_0 et v_0) pour que les suites (u_n) et (v_n) aient chacune une limite finie quand $n \to +\infty$. Lorsque cette condition est remplie, que peut-on dire de ces suites ?

4.2. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par ses premiers termes u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

pour tout $n \geq 0$.

1. Déterminer une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$, pour tout $n \geq 1$.
2. Exprimer $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de A et de $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.
3. Diagonaliser A et en déduire A^n.
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

4.3. Déterminer toutes les suites réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$