Feuille d'exercices 2

1. Formes quadratiques : méthode de Gauss

1.1. Pour les formes quadratiques suivantes :
a) $Q(x, y) = x^2 - 6xy + 5y^2$
b) $Q(x, y) = xy$
c) $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6xy$
d) $Q(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2yz$
e) $Q(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 + z^2 + 4xy - 6xz + 5yz$
f) $Q(x, y, z) = xy + 2xz - 3yz$
g) $Q(x, y, z) = 3xz - 2xy - 4yz$
h) $Q(x, y, z, t) = xy + 2xz + 2xt + yz + 4yt + 2zt$

1. Utiliser la méthode de Gauss pour réduire Q.
2. Déterminer son rang et sa signature.
3. La forme quadratique Q est-elle positive ? négative ? définie positive ? définie négative ?
4. On pourra préciser une base dans laquelle Q est réduite.

2. Extrema locaux des fonctions de plusieurs variables

2.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 2xy + y - y^3$.
1. Déterminer les points critiques de f.
2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en chaque point critique (x_0, y_0) de f.
   On pourra noter $f(x_0 + h, y_0 + k) = \cdots$.
3. Déterminer les extrema locaux de la fonction f.

2.2. Mêmes questions pour la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$.

2.3. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et préciser leur nature

a) $f(x, y) = x^2 - y^3$ b) $f(x, y) = y^2 + x^6$

Peut-on conclure à partir de l'étude du signe de la forme quadratique donnée par la formule de Taylor ?

2.4. Chercher les extremums locaux ou globaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 - e^y)^2$$

2.5. Étudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$ b) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$

c) $f(x, y) = y^2 + x \sin y$ d) $f(x, y) = (3x + 4y)e^{-x^2-y^2}$

2.6. Étudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x,y,z) = z^2(1+xy)+xy$ b) $f(x,y,z) = (x-z^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$

3. Équations différentielles d'ordre 1

3.1. Soit l'équation différentielle définie sur l'intervalle $]-\pi/2,\ \pi/2\ [$ par

$$x'(t) = -(\tan t)x(t) + \frac{1}{\cos t} \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Donner les solutions maximales de (E).

3.2. Résoudre sur l'intervalle $]-1,\ 1\ [$ l'équation différentielle

$$x'(t) = \frac{2}{1-t^2}x(t) + (1+t)e^t$$

On pourra remarquer que $\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1-t}$.

3.3. On considère l'équation différentielle sur $]\,0,\ +\infty\ [$:

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2}\,x(t) - \frac{1}{t^3} \tag{E}$$

1. Calculer $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{s^3}\,e^{-1/s}\,ds$ pour $t \in\ ]\,0,\ +\infty\ [$.

   On pourra faire le changement de variable $u = -\dfrac{1}{s}$ *et ensuite intégrer par parties.*
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière de (E) sur $]\,0,\ +\infty\ [$ à l'aide de la méthode de variation de la constante.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $]\,0,\ +\infty\ [$.

3.4. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(t,x) = -\dfrac{t}{x}$.
On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = F(t, x(t)) = -\frac{t}{x(t)} \tag{E}$$

1. Montrer que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, le problème de Cauchy

   $$\begin{cases} x'(t) = F(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

   admet une unique solution maximale.
2. Déterminer les solutions maximales de (E). Sont-elles globales ?
3. Dessiner les graphes des solutions maximales de l'équation.
   Vérifier qu'ils forment une partition de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (conséquence de 1.).

3.5. Mêmes questions si $F(t,x) = \dfrac{t}{x}$.

3.6. On considère l'équation différentielle définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$x'(t) = 3|x(t)|^{2/3} \tag{E}$$

1. Montrer que la fonction identiquement nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions $x : I \to \mathbb{R}$ de (E) vérifiant $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$ (on donnera le plus grand intervalle I possible).
3. Même question avec $x(t) < 0$ pour tout $t \in I$.
4. Monter que les solutions trouvées dans 2. et 3. ne sont pas maximales en remarquant qu'on peut les raccorder avec la solution nulle.
5. Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3|x(t)|^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   admet une infinité de solutions maximales (qui sont globales).
   Préciser pourquoi le Th de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas ici.

3.7. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x'(t) = x(t)\,(1 - x(t)) \tag{E}$$

1. Justifier l'existence et unicité de solution maximale de tout Problème de Cauchy pour (E).
2. Déterminer les solutions maximales constantes de (E).
3. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E) vérifiant $0 < x(t_0) < 1$.
   Montrer qu'elle est bornée, en déduire grâce à un résultat du Cours qu'elle est globale ($I = \mathbb{R}$).
4. Soit $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(1 - x(t)) \\ x(0) \ = 2 \end{cases}$$

   (a) Montrer que $x_1(t) > 1$ pour tout $t \in I_1$.

   (b) Calculer

$$\int_0^t \frac{x_1'(u)}{x_1(u)(1 - x_1(u))}\,du$$

   pour tout $t \in I_1$.

   (c) En déduire x_1 et I_1.

3.8. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x'(t) = 2t(e^{x(t)} - 1) \tag{E}$$

1. Justifier l'existence et unicité de solution maximale de tout Problème de Cauchy pour (E).
2. Déterminer les solutions maximales constantes de (E).
3. Soit $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t(e^{x(t)} - 1) \\ x(0) \ = \ln 2 \end{cases}$$

(a) Montrer que $x_1(t) > 0$ pour tout $t \in I_1$. En déduire que la fonction

$$t \longrightarrow \frac{x_1'(t)}{e^{x_1(t)} - 1}$$

est bien définie sur l'intervalle I_1.

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^t \frac{x_1'(u)}{e^{x_1(u)} - 1}\, du$, pour tout $t \in I_1$ (*remarquer que* $\displaystyle\frac{x_1'(u)}{e^{x_1(u)} - 1} = \frac{e^{-x_1(u)} x_1'(u)}{1 - e^{-x_1(u)}}$).

(c) Déterminer x_1 et I_1.

4. Systèmes différentiels linéaires

4.1. Déterminer les solutions à valeurs réelles du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = & 4x(t) + 6y(t) \\ y'(t) = & -3x(t) - 5y(t) \\ z'(t) = & -3x(t) - 6y(t) \quad -5z(t) \end{cases}$$

4.2. Donner l'ensemble des solutions à valeurs réelles du système différentiel suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x' & = & x & & -2z \\ y' & = & 6x & +4y & -6z \\ z' & = & 6x & +3y & -7z \end{cases}$$

1. Quelle est la solution de (S) telle que $x(0) = 0$, $y(0) = -1$ et $z(0) = -1$?
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) telles que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ tendent toutes les trois vers 0 quand $t \to +\infty$.

4.3. On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = & x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = & 2x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

1. La matrice du système est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. Déterminer les solutions à valeurs complexes de (S), puis les solutions à valeurs réelles.

4.4. Résoudre le système différentiel à coefficients réels

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

4.5. Trouver toutes les solutions à valeurs réelles du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.6. Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x'''(t) + 3x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 0 \qquad (E)$$

1. En introduisant les fonctions inconnues auxiliaires $y = x'$ et $z = x''$, transformer (E) en un système différentiel 3×3 du premier ordre
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
Résoudre ce système et déterminer les solutions à valeurs réelles de (E).
2. Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$.

4.7. On considère le système différentiel
$$(S) \qquad \begin{cases} x'' &= 2x & -y' \\ y'' &= -y & +2x' \end{cases}$$

1. En introduisant les fonctions inconnues auxiliaires $z = x'$ et $w = y'$, transformer (S) en un système différentiel 4×4 du premier ordre
$$(S') \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$
2. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2)$.
La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
3. Déterminer les solutions à valeurs réelles de (S'). En déduire celles de (S).

Exercices supplémentaires.
Systèmes dont la matrice est triangulaire ou semblable à une matrice triangulaire.

4.8. Résoudre le système différentiel à coefficients réels
$$\begin{cases} x'(t) = & x(t) & +2y(t) + 1 \\ y'(t) = & & y(t) + t \end{cases}$$

4.9. Résoudre le système différentiel à coefficients réels
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) & & & +e^t \\ y'(t) = x(t) & +y(t) & & +e^{2t} \\ z'(t) = x(t) & & +z(t) & +e^{3t} \end{cases}$$

4.10. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Résoudre le système différentiel
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

4.11. On considère le système différentiel
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
Montrer que la matrice du système est semblable à une matrice triangulaire supérieure et le résoudre.