Feuille d'exercices 3

1. Systèmes différentiels linéaires dans le plan

1.1. Pour chacune des matrices suivantes

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

on considère le système différentiel linéaire

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S}$$

1. Déterminer les solutions du système et son flot.
2. Déterminer les points d'équilibre et les trajectoires rectilignes de (S).
3. Préciser l'allure des autres trajectoires (on étudiera leurs branches infinies, asymptotes, branches paraboliques, tangentes remarquables...).
4. Tracer le portrait de phases du système et préciser son type (« col », « nœud répulsif »...) ainsi que la nature des points d'équilibre (stable, instable, attractif, répulsif).

1.2. Soit le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S'}$$

Utiliser l'égalité

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} P \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pour déterminer, grâce à 1.1 c), le flot et le portrait de phases de (S').

1.3. Utiliser 1.1 d) et l'égalité

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 4/3 & 10/3 \end{pmatrix} P \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pour déterminer le flot et le portrait de phases du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

1.4. Soit le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S}$$

Montrer que dans l'identification de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ donnée par $(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$ on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow (2 - i3)z$$

en déduire que (S) s'écrit $z'(t) = (2 - i3)z(t)$, où $z(t) = x(t) + iy(t)$.
Résoudre cette équation, en déduire le portrait de phases du système (S) et ses solutions.

1.5. Pour les matrices suivantes

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

on considère le système différentiel linéaire

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque espace propre.
2. En déduire le type de portrait de phases du système (S).
3. Dessiner les trajectoires rectilignes du système et compléter l'allure du portrait de phases à partir de la question précédente.

2. Familles à un paramètre de systèmes différentiels linéaires

2.1. Pour tout $\alpha \geq 0$ soit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1-\alpha^2}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S_α}$$

1. Calculer trace(A_α), det(A_α), ainsi que P_{A_α} (le polynôme caractéristique de A_α) et $\Delta(\alpha)$ (son discriminant).
2. En déduire le type de portrait de phases du système (S_α) en fonction de α. Préciser la nature (stable, instable, attractif, répulsif) de l'origine comme point d'équilibre de (S_α).
3. Donner l'allure du portrait de phases du système dans les cas $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 3$ et $\alpha = 5$. *(Déterminer les trajectoires rectilignes du système, esquisser les autres trajectoires à partir des informations de la question 2).*

2.2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha & \alpha^2 + 1 \\ -\alpha^2 - 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S_α}$$

1. Pour quelles valeurs de α le système (S_α) admet-il des trajectoires rectilignes ?
   des trajectoires périodiques non réduites à un point ?
2. Pour quelles valeurs de α l'origine est-il asymptotiquement stable ? stable mais non asymptotiquement stable ? instable ?
3. Donner l'allure du portrait de phases de (S_α) pour les cas $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

3. Portraits de phases en dimension 1

3.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = -x^2$. Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) = -x^2(t) \tag{E}$$

1. A partir du tableau de signes de f déterminer le portrait de phases de (E), qu'on dessinera sur l'axe Ox du plan Otx. Préciser la nature du point d'équilibre de l'équation.
2. Sans faire de calculs esquisser l'allure des graphes des solutions de (E) dans le plan Otx.
3. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale non nulle de (E).
   Montrer à partir du Th. des bouts (Th 7.1.2 ou Th. 5.5.1) que
   (a) Si $x > 0$, alors I n'est pas borné à droite.
   (b) Si $x < 0$, alors I n'est pas borné à gauche.
4. Calculer explicitement les solutions de (E) et déterminer s'il y a explosion en temps fini dans les cas (a) et (b) de 3. Préciser l'allure des solutions donnée dans 2.

3.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x(x-2)$. Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{E}$$

1. Dresser le portrait de phases de (E) sur l'axe Ox du plan Otx. Préciser la nature des points d'équilibre.
2. Sans calculs supplémentaires esquisser l'allure des solutions de (E) dans le plan Otx.
3. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale non constante de (E). Préciser à l'aide du Th. des bouts dans quel cas $I = \mathbb{R}$, I est non borné à droite ou I est non borné à gauche.

3.3. Pour les familles à un paramètre d'équations autonomes (E_μ) suivantes

a) $x'(t) = \mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$

b) $x'(t) = \mu x(t)$ $(\mu \in \mathbb{R})$

c) $x'(t) = x^2(t) - \mu x(t)$ $(\mu \in \mathbb{R})$

d) $x'(t) = x^3(t) - \mu x(t)$ $(\mu \in \mathbb{R})$

e) $x'(t) = \mu x(t)(x^2(t) - \mu^2)$ $(\mu \in \mathbb{R})$

f) $x'(t) = \mu x(t) - \sin x(t)$ $(\mu \geq 2/\pi)$

1. Tracer et commenter le diagramme de bifurcation : on précisera pour chaque valeur du paramètre μ les points d'équilibre de (E_μ) et leur nature.
2. Déterminer les valeurs de μ où il y a un changement qualitatif du portrait de phases (bifurcation).

4. Linéarisation autour d'un point d'équilibre

4.1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y^2(t) \\ y'(t) = -x^2(t) - y(t) \end{cases} \tag{S}$$

1. Linéariser (S) au point d'équilibre $(0,0)$.
2. Appliquer le Th. de Liapounov pour déterminer la nature de ce point d'équilibre.

4.2. Déterminer les points d'équilibre du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x^2(t) - 1 \end{cases} \tag{S}$$

1. Linéariser le système autour de chaque point d'équilibre.
2. Déterminer grâce au Th. de Liapounov la nature des points d'équilibre de (S).
3. Que peut-on dire à partir du Th. de Hartman-Grobman sur le portrait de phases de (S) au voisinage de chaque point d'équilibre ?

4.3. *On donne dans cet exercice un exemple en dimension 2 qui montre que la linéarisation ne conserve pas toujours la nature des points d'équilibre :* Soit λ un réel non nul. Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \lambda(x^2(t) + y^2(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (S_\lambda)$$

1. Montrer que l'origine est un point d'équilibre du système. Montrer que le système linéarisé de (S_λ) au point $(0,0)$ est
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \qquad (L)$$
Quel est le type de portrait de phases du système (L) ? Quelle est la nature de $(0,0)$ comme point d'équilibre de (L) ? Le Th. de Liapounov s'applique-t-il ici ?
2. Décrire géométriquement les champs de vecteurs
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \lambda(x^2+y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
Que peut-on conjecturer sur le portrait de phases de (S_λ) et la nature de son point d'équilibre en fonction du signe de λ ?.
3. A partir des coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}$, on introduit les inconnues $\rho(t)$ et $\theta(t)$ par
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \rho(t) \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} \qquad (P)$$
Exprimer $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ dans la base ($\begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}$) à partir de (P), puis à partir de (S_λ). En déduire que les solutions de (S_λ) autres que la solution nulle sont données par
$$\begin{cases} \rho'(t) = \lambda\rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$
4. Déterminer le portrait de phases de (S_λ) et la nature de son point d'équilibre.
Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement ρ, il suffit d'étudier le portrait de phases de l'équation $\rho'(t) = \lambda\rho^3(t)$.

5. Systèmes gradient

5.1. On considère le système différentiel

$$X'(t) = -\text{grad}\, V(X(t)) \qquad (SG)$$

pour chacune des fonctions suivantes

a) $V(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b) $V(x,y) = (x+y)e^{-xy}$

c) $V(x,y) = y^2 - \cos x$

d) $V(x,y) = x^2(x-1)^2 + (x+y)^2$

e) $V(x,y) = y \sin x$

f) $V(x,y) = \sin x \cos y$

1. Déterminer les points d'équilibre de (SG) et préciser leur nature.
2. Donner l'allure des courbes de niveau de V, en déduire le portrait de phases du système (SG).

6. Systèmes conservatifs

6. 1. On considère l'équation différentielle

$$x''(t) = \frac{1}{2}x^2(t) - x(t) \tag{E}$$

Déterminer une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \varphi'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

Si $v(t) = x'(t)$, l'équation (E) équivaut alors au système différentiel conservatif

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\operatorname{grad} \varphi(x(t)) = \dfrac{1}{2}x^2(t) - x(t) \end{cases} \tag{SC}$$

1. Soit $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction
$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + \varphi(x)$$
Montrer que H est constante le long des trajectoires du système (SC) (on dit alors que H est une *intégrale première* du système).
2. Déterminer les points d'équilibre du système.
Préciser leur nature à l'aide des Théorèmes de Lejeune-Dirichlet et de Liapounov, ainsi que les informations obtenues à l'aide du Th. de Hartman-Grobman.
3. Donner l'allure des courbes de niveau de la fonction H et déterminer le portrait de phases du système (SC).

6.2. Étudier de la même manière l'équation

$$x''(t) = x^3(t) - x(t)$$

6.3. (Oscillateur harmonique plan)
Soit $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ la position d'un point matériel de masse m évoluant dans le champ de forces $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $F(X) = -kX$ $(k > 0)$. On a alors

$$X''(t) = -\frac{k}{m}X(t) \tag{E}$$

Soit $V(t) = (v_1(t), v_2(t)) = X'(t)$.

1. Déterminer une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que l'équation (E) soit équivalente au système différentiel conservatif dans $\mathbb{R}^4$
$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\operatorname{grad} \varphi(X(t)) \end{cases} \tag{SC}$$
2. Écrire explicitement les quatre équations de (SC).

3. Soit $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$H(x_1, x_2, v_1, v_2) = H(X, V) = \frac{||V||^2}{2} + \varphi(X)$$

Déterminer $H(x_1, x_2, v_1, v_2)$ et montrer que la fonction H est une intégrale première de (SC).

4. Déterminer les points d'équilibre du système (SC), préciser leur nature.

6.4. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = v_1(t) \\ x_2'(t) = v_2(t) \\ v_1'(t) = -x_1(t) - 2x_1(t)x_2(t) \\ v_2'(t) = -x_2(t) - x_1^2(t) + x_2^2(t) \end{cases} \tag{S}$$

1. Montrer que (S) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\operatorname{grad} \varphi(X(t)) \end{cases}$$

où $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $V(t) = (v_1(t), v_2(t))$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction que l'on déterminera.

2. En déduire une intégrale première du système (S).
3. Déterminer les points d'équilibre de (S). Étudier leur nature.

6.5. Un système Hamiltonien dans $\mathbb{R}^2$ est un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ y'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{SH}$$

où $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Quels sont les points d'équilibre du système ?
2. Montrer que H est une intégrale première de (SH).
3. Montrer que les systèmes (SC) des exercices 6.1 et 6.2 sont Hamiltoniens.

6.6. Montrer que le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y^2(t) \\ y'(t) = -y(t) - x^2(t) \end{cases}$$

est un système Hamiltonien avec $H(x, y) = xy + \frac{x^3+y^3}{3}$.

1. Préciser les informations données par les Théorèmes de Liapounov et Hartman-Grobman sur le point d'équilibre $(0, 0)$.
2. Tracer les courbes de niveau de H, en déduire le portrait de phases du système. Quelle est la nature du point d'équilibre $(-1, -1)$?