Parcours élève ingénieur Polytech **Mathématiques, S3**
Université Paris-Sud **Orsay 2014-2015**

TP 1

Exercice 1: On considère le système différentiel de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$X^{'}(t) = AX(t), \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{S}$$

1. En utilisant la fonction "bdiag" de scilab, donnez deux matrices P et D, avec D diagonale, telle que $A = PDP^{-1}$. Calculez également P^{-1} en utilisant la commande "inv" et vérifiez que l'on a bien $A = PDP^{-1}$.

2. On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = (a(t), b(t))$ et on considère maintenant le système
$$Y^{'}(t) = DY(t). \tag{S$'$}$$
Quels sont les points d'équilibre ?

3. Quelles sont les trajectoires rectilignes de (S$^{'}$) ? Tracez-les en utilisant la commande "plot2d".

4. A l'aide de la fonction "fchamp" tracez des vecteurs du champ des vecteurs vitesse aux points de coordonnées entières comprises entre -10 et 10. On introduira pour cela la fonction "function $[Y] = \text{multD}(t, X)$" qui renvoie le vecteur $Y = DX$ (même s'il n'intervient pas, le "t" dans la définition de multD est nécessaire pour l'utilisation de "fchamp").

5. Représentez quelques trajectoires non-rectilignes de (S$^{'}$), en prenant comme données initiales des points (α, β) où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ sont des petits entiers relatifs. Pour cela, pour chaque donnée (α, β) définissez les matrices
$$Y_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} a(t_1) & b(t_1) \\ a(t_2) & b(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ a(t_n) & b(t_n) \end{pmatrix} \text{ où } t_1, ..., t_n \in [-1, 1],$$

en utilisant la forme explicite des solutions. On adaptera au besoin l'intervalle en temps ou le champ de vecteur. On prêtera attention au fait que si l'on veut tracer plusieurs courbes dans une même fonction "plot2d", les vecteurs contenant les abscisses et les vecteurs contenant les ordonnées doivent être en colonne et de même taille.

6. En calculant les produits $P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tracez les trajectoires rectilignes du système (S).

7. Définissez une fonction "function [X]=multligne(Y,P)" qui a deux matrices $Y \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ renvoie la matrice $X \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, dont chaque ligne est le produits entre P et la ligne correspondante de Y (la $k^{\text{è}}$ ligne de X est $P\begin{pmatrix} a(t_k) \\ b(t_k) \end{pmatrix}$).

8. En utilisant la fonction "PmultY(Y,P)", calculez la matrice

$$X_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} x(t_1) & y(t_1) \\ x(t_2) & y(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ x(t_n) & y(t_n) \end{pmatrix} \text{ où } t_1, ..., t_n \in [-1, 1],$$

et $(x(t), y(t))$ est la solution de (S) de donnée initiale $(x_0, y_0) = P^{-1}(\alpha, \beta)$.

9. Tracez les courbes obtenues dans une nouvelle fenêtre (en utilisant `set("current_figure",2)`) et tracez des vecteurs du champ des vecteurs vitesse associé à la matrice A. On introduira là aussi une fonction multA, comme dans la question 4.

10. Reprendre l'étude pour différentes matrices A diagonalisable. On pourra par exemple reprendre la feuille de TD3. On écrira alors un script qui permet de passer facilement d'une matrice à l'autre. Reprendre également l'étude pour des matrices à valeurs propres complexes, ou non diagonalisables.